



This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

- + *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
- + *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
- + *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
- + *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at <http://books.google.com/>

Phys 122.6



Christiaan Huygens van Zeydichem

CHRISTIANI HUGENII

ALIORUMQUE SEculi XVII VIRORUM CELEBRIUM

EXERCITATIONES MATHEMATICÆ

ET PHILOSOPHICÆ.

EX MANUSCRIPTIS IN BIBLIOTHECA ACADEMIÆ LUGDUNO-BATAVÆ

SERVATIS EDIDIT

PETRUS JOANNES UYLENBROEK,

IN EADEM ACADEMIA PHYSICÆ ET ASTRONOMIÆ PROF. EXTRAORD.

FASCICULUS II,

CONTINENS ADDITAMENTA AD FASC. I, INTER QUÆ

VAUMESLII, DUILIERII ET HUB. HUIGHENII

EPISTOLAS.

HAGÆ COMITUM,

EX TYPOGRAPHIA REGIA.

MDCCCKXXIII.

Phys 122.6



ADDITAMENTA

AD

FASCICULUM I.

§ I.

Ad pag. 1 — 5.

Cum inquirerem utrum inter MSS. Hugeniana nonnulla exstarent, quae iis illustrandis inservirent, de quibus Leibnitius in priori hac epistola obscurius egit, nihil quidem huc faciens se mihi obtulit; at in duas tamen incidi ipsius Hugonii epistolas memorabiles, et quodammodo cum hujus loci argumento conjunctas, alteram ad F. Schotenium, alteram ad Doct. de Bie scriptas, e quibus nempe efficias formulae Cardani demonstrationem, cujus auctor Huddenius celebratur, etiam a Hugenio quaesitam et inventam fuisse.

Huddenius sc. dictam demonstrationem proposuit in epistola sua de Reductione Aequationum, mense Julii a. 1657 ad Schotenium missa, (cf. Cartes. Geom. edit. a F. Schoten. T. I. pag. 499) ipseque Schotenius in Append. de cubic. aequation. (cf. ibid. pag. 367) testatus est se eandem demonstrationem acutissimo Huddenio acceptam referre. Jam vero exstat Schotenii epistola 29^o. m. Maji 1655 ad Hugonium, ⁽¹⁾ cujus hic finis est: » Rem autem omnium gratissimam praestiteris, si modum, quo Cardani regulae inventae fuerint, perscribere haud graveris. Vale! »

Ad quae respondit Hugonius die 5^o. m. Junii 1655 his verbis:

(¹) Invenitur haec epistola Hugoniique ad eandem responsum in fasc. 5^o.

» Cardani regularum inventio per algebram nostram, quam tantopere exponi tibi desideras, ea est hujusmodi. Proponatur aequatio $x^3 = -px + q$, h. e. $x^3 + px - q = 0$, sitque invenienda quantitas x . Augeatur radix quantitate aliqua incognita z , ut sit $x + z = y$, hoc est $x = y - z$; ergo $x^3 = y^3 - 3y^2z + 3yz^2 - z^3$, et loco prius expositae aequationis, quae erat $x^3 + px - q = 0$, erit ista: $y^3 - 3y^2z + 3yz^2 - z^3 + py - pz - q = 0$. Hic, quoniam $-3y^2z + 3yz^2$ fit ex ductu $y - z$ in $-3yz$, et rursus quod habetur $+py - pz$ ex $y - z$ in $+p$, apparet quod, si $3yz$ sit $= p$, tum se mutuo tollent dicti termini $-3y^2z + 3yz^2$ et $+py - pz$, solique restabunt $y^3 - z^3 - q = 0$.

Sit igitur $3yz = p$, ergo $z = \frac{1}{3} \frac{p}{y}$, et aequatio erit $y^3 - \frac{1}{27} \frac{p^3}{y^3} - q = 0$.

Unde $y^6 = qy^3 + \frac{1}{27} p^3$, quae quadrata aequatio est, fitque $y^3 = \frac{1}{2} q + \sqrt{\frac{1}{4} qq + \frac{1}{27} p^3}$; quare $y = \sqrt[3]{Q \frac{1}{2} q + \sqrt{\frac{1}{4} qq + \frac{1}{27} p^3}}$. Cognita jam quantitate y , non ignorabitur x , quae erat $= \frac{1}{3} \frac{p}{y}$. Erat autem

$$x = y - z, \text{ ergo } x = \sqrt[3]{Q \frac{1}{2} q + \sqrt{\frac{1}{4} qq + \frac{1}{27} p^3}} - \frac{\frac{1}{3} p}{\sqrt[3]{Q \frac{1}{2} q + \sqrt{\frac{1}{4} qq + \frac{1}{27} p^3}}}.$$

Quae regula facilius videri possit quam Cardani illa, quoniam semel tantum radicem cubicam extrahere opus sit. Caeterum ut ipsam Cardani regulam exhibeamus, quantitatem z similiter ut y ex praecedentibus inveniemus. Nimirum ex eo quod ponebatur $3yz = p$, fit $y = \frac{1}{3} \frac{p}{z}$.

Unde, loco superioris aequationis $y^3 - z^3 - q = 0$, erit $\frac{1}{27} \frac{p^3}{z^3} - z^3 - q = 0$,

hoc est $z^6 = -qz^3 + \frac{1}{27} p^3$. Unde $z = \sqrt[3]{Q - \frac{1}{2} q + \sqrt{\frac{1}{4} qq + \frac{1}{27} p^3}}$.

Cum itaque fuerit $x = y - z$, erit jam $x = \sqrt[3]{Q \frac{1}{2} q + \sqrt{\frac{1}{4} qq + \frac{1}{27} p^3}} - \sqrt[3]{Q - \frac{1}{2} q + \sqrt{\frac{1}{4} qq + \frac{1}{27} p^3}}$, quae Cardani regularum una est.

Altera simili methodo invenitur in hunc modum. Detur $x^3 = px + q$, sive $x^3 - px - q = 0$. Diminuatur radix quantitate incognita z , ut

sit $x - z = y$, hoc est $x = y + z$. Exitque prioris aequationis loco ista $y^3 + 3ygz + 3yzx + z^3 - py - pz - q = 0$. Hic rursus si ponatur $3yz = p$, tollent se mutuo quantitates istae $+3ygz + 3yzx$ et $-py - pz$, tantumque supererunt $y^3 + z^3 - q = 0$, unde $y^6 = qy^3 - \frac{1}{27}p^3$. Cujus aequationis ambigua est radix. Fit nimirum $y = \sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}}$ vel $y = \sqrt[3]{\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}}$. Quod si porro quaeratur etiam z ex eo quod $3yz = p$, uti in prioris regulae inventionem quaesita fuit, rursus ambigua radix aequationis inveniatur, utque modo y , ita nunc erit $z = \sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}}$ vel $z = \sqrt[3]{\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}}$. Itaque alteram radicem sumendo pro x , alteram pro y (etenim ponendum est alteram altera majorem esse) fiet $y + z$ hoc est $x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}}$.

Haec Hugonii verba si conferantur cum iis quae leguntur apud Schotenium l.1. p. 366. sq. fieri vix potest quin statuamus virum cl. memoria lapsum fuisse et *Huddenium* scripsisse pro *Hugonium*. Ceterum tribus ferme annis ante, Hugonius eandem solutionem communicaverat cum viro doctissimo de Bie, in epistola scripta 30 m. Dec. 1652 hujus indolis ⁽¹⁾:

» Myn Heer! Ick ben door verscheidene toevallen belet geweest eerder myne beloften nae te komen, raekende het verklaeren der stelling van Vieta, tot vindinge der regulen van Cardanus, dewelke hy van willens gesoght heeft duyster te maken. Evenwel bemerk ick, dat dezelve in onze bekende termen gebragt synde, niet anders en is, dan als volgt:

Sequitur jam eadem regulae demonstratio quam supra exhibuimus, quamque hic repetere non opus est. Dein ita pergit noster:

(1) Exstat haec epist. in libro K. 3. p. 77 sqq.

» Dit is voor zoo veel aangaet de regulen van Cardanus. Indien UWEd. nogh niet gevonden heeft, tot wat middel men soude kunnen geraeken tot die van Cartesius, dewelke in plaets van de aequatie $x^4 + pxx + qx + r$ stelt $y^6 + 2py^4 + ppyy - qq$, ick sal hetzelfde meede gaerne aan UEd. communicceeren. In het doorreysen heb ick laestmael Pr. Schoten de difficulteyt voorgesteld van de cromme linie van Cartesius, hoe dat dezelve in 6 plaetsen van een cirkel soude kunnen doorsneden worden; dewelke my tot andtwoord gaf, sulks eertyds beproeft en waer gevonden te hebben. UEd. kan hetzelfde oock lightelyck examineeren, stellende een aequatie in dewelke x 6 verscheydene waere quantiteyten beteekent, als 1, 2, 3, 4, 5, 6. Dat is $x - 1 = 0$, item $x - 2 = 0$, ende soo voorts, ende alles door malkander multipliceerende. Alhoewel ick meyne dat men sommige der intersectionen quaelick moet kunnen bemercken. Hiermeede eyndigende en verwaghtende met UEd. andtwoord de demonstratie waervan geseght was, blyve » etc.

Ex his itaque epistolis satis superque constare nobis videtur, dictae formulae demonstrationem, perspicuitate et elegantia praecellentem, Hugenum quoque auctorem habuisse. ⁽¹⁾

Ceterum D^{um}. de Bie in disciplinarum historia minus cognitum, haud infimae notae mathematicum fuisse ex iis conjicies, quae de eo sequentibus verbis testatus est Hugenus in epistola ad D^{um}. de Vogelaer 1 Jan. 1653. ⁽²⁾

» Door deese ingeslotene sende ick yets onse kunst aengaende aan Mr. de Bie, hetwelk ick hem laestmael beloofd hadde, waer teegens

⁽¹⁾ Eandem hujus formulae demonstrationem etiam alio loco ipsa Hugonii manu descriptam inveni, sc. in parte posteriori libelli in Catalogo n^o. 17 insigniti, cui hunc titulum praefixit Hugenus: *puerilia pleraque*.

⁽²⁾ Exstat haec epist. in libro K. 3. p. 72.

hy my weeder een seekere demonstratie (schuldig) is. Indien de Heeren van Amsterdam soo een man Professor maekten, en lieten hem lessen doen in onse tael, gelyk oock te Leyden geschiet, het soude aan geen Studenten noch toehoorders gebreeken. Ick hoope dat het daer nog toe koomen zal. »

Neque Hugenum haec spes fefellit. Doct. enim Alexander de Bie, haud diu post in Amstelædamensium Athenæo Illustri Matheseos et Philosophiae Professor creatus est.

§ II.

Ad pag. 9. lin. penult. verba: *Je vous envoie un essay.*

Notum est Leibnitium mente concepisſe methodum , qua characterum ope ſitus exprimeretur , quemadmodum ſignorum algebraicorum auxilio quantitates indeterminatae designantur ; ipſum vero hanc ſuam inventionem non publici juris feciſſe , quamobrem cum in MSS. fasciculo 13°. illud ipſum periculum invenerim de quo Fasc. I. p. 9 mentio facta eſt , quodque principia novae hujus doctrinae complectitur , illud hoc loco describendum eſſe putavi.

J'ay trouvé quelques élémens d'une nouvelle caracteriſtique , tout à fait différente de l'Algebre , et qui aura des grands avantages pour representer à l'eſprit exactement et au naturel , quoyque ſans figures , tout ce qui depend de l'imagination. L'algebre n'eſt autre choſe que la caracteriſtique des nombres indeterminés , ou des grandeurs. Mais elle n'exprime pas directement la ſituation , les angles et le mouvement , d'où vient qu'il eſt ſouvent difficile de reduire dans un calcul ce qui eſt dans la figure , et qu'il eſt encore plus difficile de trouver des demonſtrations et des conſtructions géométriques aſſez commodes lors meme que le calcul d'Algebre eſt tout fait. Mais cette nouvelle caracteriſtique ſuivant des figures de vue , ne peut manquer de donner en meme temps la ſolution et la conſtruction et la demonſtration géométrique , le tout d'une maniere naturelle et par une analyſe. C'eſt à dire par des voyes determinées. L'algebre eſt obligée de ſuppoſer les elemens de geometrie , au lieu que cette caracteriſtique pousse l'analyſe j'uſqu'au bout. Si elle eſtoit achevée de la maniere que je la conçois , on pourrait faire

en caracteres , qui ne seront que des lettres de l'Alphabet , la description d'une machine quelque composée qu'elle pourroit estre , ce qui donneroit moyen à l'esprit de la connoître distinctement et facilement avec toutes les pieces et même avec leur usage et mouvement sans se servir de figures ny de modelles et sans gener l'imagination , et on ne laisseroit pas d'en avoir la figure présente dans l'esprit autant que l'en se voudroit faire l'interpretation des caracteres. On pourroit faire aussi par ce moyen des descriptions exactes des choses naturelles , comme par ex. des plantes et de la structure des animaux ; et ceux qui n'ont pas la commodité de faire des figures , pourveu qu'ils ayent la chose présente devant eux ou dans l'esprit , se pourront expliquer parfaitement et transmettre leur pensées ou experiences à la posterité , ce qui ne se scauroit faire aujourd'huy , car les paroles de nos langues ne sont pas assés arrêtées ny assés propres pour se bien expliquer sans figures. Mais c'est la moindre utilité de cette caracteristique , car s'il ne s'agit que de la description , il vaudra mieux , quand on en peut et veut faire la dépense , d'avoir les figures et même les modelles , ou plustost les originaux des choses. Mais l'utilité principale consiste dans les conséquences et raisonnemens , qui se peuvent faire par les opérations des caracteres , qui ne se scauroient exprimer par des figures (et encor moins par des modelles) sans les trop multiplier , ou sans les brouiller par un trop grand nombre de points et de lignes , d'autant qu'on seroit obligé de faire une infinité de tentatives inutiles : au lieu que cette methode meneroit seurement et sans peine. Je croy qu'on pourroit manier par ce moyen la mécanique presque comme la geometrie , et qu'on pourroit même venir jusqu'à examiner les qualités des materiaux , par ce que cela dépend ordinairement de certaines figures , de leurs parties sensibles. Enfin je n'espere pas qu'on puisse aller assez loin en physique , avant que d'avoir trouvé un tel abrégé pour soulager

l'imagination. Car nous voyons par exemple quelle suite de raisonnemens géométriques est nécessaire pour expliquer seulement l'arc en ciel, qui est un des plus simples effects de la nature, par où nous pouvons juger combien de consequences seroient nécessaires pour penetrer dans l'interieur des mixtes, dont la composition est si subtile que le microscope, qui en decouvre bien plus que la cent-millieme partie, ne l'explique pas encor assés pour nous aider beaucoup. Cependant il y a quelque esperance d'y arriver en partie, quand cette analyse veritablement géometrique sera établie.

Mais comme je ne remarque pas que quelque autre ait jamais eu la meme pensée, ce qui me fait craindre qu'elle ne se perde, si je n'ay pas le tems de l'achever; j'ajouteray ici un essay, qui me paroist considerable, et qui suffira au moins à rendre mon dessein plus croyable et plus aisé à concevoir, afin que, si quelque hazard en empeche la perfection à present, ceçy serve de monument à la posterité, et donne lieu à quelque autre d'en venir à bout.

Or, il est constant qu'il n'y a rien de plus important dans la géometrie que la consideration des lieux; c'est pourquoy j'en exprimeray un des plus simples par cette maniere de caracteres. Les lettres de l'alphabet signifieront ordinairement des points les figures. Les premières lettres, comme A, B, exprimeront les points donnés; les derniers, comme x, y , les points demandés. Et au lieu qu'on se sert des égalités ou equations dans l'algebre, je me sers icy des congruités que j'exprime par le caractere $\propto$. Par ex. dans la premiere figure A B C $\propto$ D E F veut dire qu'il y a de la congruité entre les deux triangles A B C et D E F suivant l'ordre des points, qu'ils peuvent occuper exactement la meme place, et qu'on peut appliquer ou mettre l'un sur l'autre sans rien changer dans ces deux figures que la place. Ainsi en appliquant D sur A et E sur B et F sur C, les deux triangles (estans posés egaux et semblables) seront manifestement

festement coincidents. Mais sans parler des triangles, on en peut dire autant en quelque façon des points, scavoir $A B C \propto D E F$, dans la seconde figure, (fig. 2) c'est à dire, on pourra mettre en mesme temps A sur D , et B sur E , et C sur F , sans que la situation des trois points $A B C$ entre eux, ny des trois points $D E F$ entre eux, soit changée; supposant les trois premiers joints par quelques lignes inflexibles (droites ou courbes n'importe) et les trois autres de meme. Après cette explication des caracteres, voicy les lieux:

Soit $A \propto Y$ (dans la fig. 3) c'est à dire, soit un point donné A . On demande le lieu de tous les points Y ou (Y) etc. qui ont de la congruité avec le point A . Je dis que le lieu de tous les Y sera *l'espace infini* de tous cotés. Car tous les points du monde ont de la congruité entre eux, c'est à dire l'un se peut tousjours mettre à la place de l'autre. Or tous les points du monde sont dans un meme espace. On peut aussi exprimer ce lieu ainsi $Y \propto (Y)$. Tout cela est trop manifeste, mais il falloit commencer par le commencement.

Soit (dans la fig. 4) $A Y \propto A (Y)$. Le lieu de tous les Y sera la surface de la sphere, dont le centre est A , et le rayon $A Y$, tousjours le meme en grandeur, ou égal à la donnée $A B$ ou $C B$. C'est pourquoy on peut aussi exprimer le mesme lieu ainsy: $A B \propto A Y$ ou $C B \propto A Y$.

Soit (dans la 5^e. fig.) $A X \propto B X$; le lieu de tous les X sera le plan. Deux points A et B estant donnés, on demande un troisieme X , qui ait la mesme situation à l'égard du point A , qu'il a à l'égard du point B , [c'est à dire que $A X$ soit égale ou (parce que toutes les droites egales sont congruentes) congruente à $B X$, ou que le point B se puisse appliquer au point A , gardant la mesme situation qu'il avoit à l'égard du point X] je dis que tous les points $X (X)$ d'un certain plan seul, continué à l'infini, satisferont à la question. Car comme $A Y \propto B Y$ de mesme $A (Y) \propto B (Y)$.

Mais il n'y en aura point qui satisfasse hors de ce plan. C'est pourquoy ce plan continué à l'infini sera le lieu commun de tous les points du monde, qui sont situés à l'égard de A, comme à l'égard de B. [Il s'ensuit que ce plan passera par le milieu de la droite A B, qui luy est perpendiculaire.]

Soit (dans la 6^e. fig.) $ABC \propto ABY$; le lieu de tous les Y sera la circulaire. C'est à dire, il y a trois points donnés A, B, C, on demande un quatrieme Y, qui a la meme situation que C à l'égard de A B. Je dis qu'il y a une infinité de points qui peuvent satisfaire, et le lieu de tous ces points est la circulaire. Cette description ou definition de la ligne circulaire ne présuppose pas le plan (comme celle d'Euclide) ny mêmes la droite. Cependant il est manifeste que son centre est D, au milieu entre A et B. On pourroit aussi dire ainsi: $ABY \propto AB(Y)$, car alors le lieu seroit un cercle, mais qui ne seroit pas donné. C'est pourquoy il faut ajouter un point donné. L'on se peut imaginer que les points A B demeurant fixes, et que le point C attaché à eux par quelques lignes inflexibles (droites ou courbes) et par consequent gardant la meme situation à leur égard, soit tourné à l'entour de A, B, pour decrire la circulaire CY (Y). On peut juger par là que la situation d'un point à l'égard d'un autre peut estre conçue sans exprimer la ligne droite, pourveu on les conçoive joints par quelque ligne que ce soit. Et si la ligne est posée inflexible, la situation des deux points entre eux sera immuable. Et deux points peuvent estre conçus avoir la mesme situation entre eux que deux autres points, si les uns peuvent estre joints par une ligne qui puisse estre congrue avec la ligne qui joint les autres. Je dis cecy, à fin qu'on voye que ce que j'ay dit jusqu'icy ne depend pas encor de la ligne droite (dont je vay donner la definition), et qu'il y a difference entre A, C, situation de A et C entre eux et la droite A C.

Soit (dans la fig. 7) $AY \propto BY \propto CY$; le lieu de tous les Y sera *la droite*. C'est à dire, trois points estant donnés, on demande un point Y , qui a la meme situation à l'égard de A , qu'il a à l'égard de B , et qu'il a à l'égard de C . Je dis que tous ces points tomberont dans la droite infinie $Y(Y)$. Si tout estoit dans un même plan, deux points donnés suffiroient pour determiner ainsi la droite.

Soit enfin (dans la 8^e. fig.) $AY \propto BY \propto CY \propto DY$; le lieu sera un seul *point*; car on demande un point Y , qui ait la mesme situation à l'égard de quatre points donnés A, B, C, D ; c'est à dire que les droites AY, BY, CY, DY soient égales entre elles; et il n'y a qu'un seul qui puisse satisfaire.

Ces mesmes lieux se peuvent exprimer en plusieurs autres façons, mais celles-cy sont des plus simples et des plus fécondes et peuvent passer pour des definitions. Et pour faire voir que ces expressions servent au raisonnement, je monstrey par les caracteres, avant que de finir, ce qui est produit par l'intersection de ces lieux. Premièrement: *l'intersection de deux surfaces spheriques est une ligne circulaire*. Car puisque l'expression de la circulaire est $ABC \propto ABY$, nous aurons $AC \propto AY$ et $BC \propto BY$, dont les lieux sont deux surfaces spheriques, l'une ayant le centre A et le rayon AC , l'autre le centre B et le rayon BC . De mesme: *l'intersection d'un plan et de la spherique est une ligne circulaire*. Car l'expression d'une spherique est $AC \propto AY$, et celle d'un plan est $AY \propto BY$, et par consequent $AC \propto BC$, parce que le point C est un des points Y . Or BC estant $\propto AC$, et $AC \propto AY$; nous aurons $BC \propto AY$, et AY estant $\propto BY$, nous aurons $BC \propto BY$. Joignons ces congruités, et nous aurons $A.B.C \propto A.B.Y$, c'est à dire $A.B \propto A.B, BC \propto BY, AC \propto AY$. Or, $ABC \propto ABY$ est à la circulaire, donc l'intersection d'un plan et d'une surface spherique donne la circulaire. Ce qu'il falloit demon-
trer par cette sorte de calcul. — De la même façon il paroît que

l'intersection de deux plans est une droite. Car soient deux congruïtes, l'une $A Y \times B Y$ pour un plan, l'autre $A Y \times C Y$ pour l'autre plan, nous aurons $A Y \times B Y \times C Y$, dont le lieu est la droite. Enfin, *l'intersection de deux droites est un point.* Car soit $A Y \times B Y \times C Y$ et $B Y \times C Y \times D Y$, nous aurons $A Y \times B Y \times C Y \times D Y$.

Je n'ay qu'une remarque a ajouter, c'est que je vois qu'il est possible d'étendre la caractéristique jusqu'aux choses, qui ne sont pas sujettes à l'imagination; mais cela est trop important et va trop loin pour que je me puisse expliquer la-dessus en peu de paroles.

§ III.

Ad pag. 18 verba: P. S. *J'ay marqué dans un papier à part.*

Leibnitium , nimio forte gloriae studio ductum , omnem , quam potuit , dedisse operam ut Academiae Parisiensis sociis honorariis adscriberetur , tum ex ipsius epistola 6^a. , p. 17 , tum ex proxime sequenti p. 19 discimus. Imprimis vero hoc manifestum est e nota ista separatim conscripta , quam l. c. commemorat Leibnitius , quamque in fasc. 13^o. reperimus. Est ea sequens :

P. S.

Ce que vous avés fait , Monsieur , en ma considération du temps passé , m'encourage à ajouter cecy. Le phosphore , dont je vous envoie un echantillon , pourra vous donner occasion de parler de rechef de moy chez Mons. Colbert , et j'espere que M. l'Abbé Gallois y contribuera. Il est vray que je ne suis pas à present en estat de demeurer en France : neantmoins j'ay une pensée que vous trouverés peut estre raisonnable , et l'Academie pourroit scavoir par moi de temps en temps des choses qui meritoient d'estre scues. Cela estant jugés , s'il ne se pourroit faire que je fusse considéré comme un membre honnoraire de l'Academie , quoique absent , ou au moins , si on ne me pourroit prouver une autre semblable avantage en cette considération. Peut estre que ce que j'ay fait en d'autres matieres pourroit encor paroistre propre à estre un jour Les choses qui appartiennent à l'Academie et particulièrement ma quadrature arithmetique , dont j'ay laissé meme le MS. à Paris en cette considération , dans laquelle est démontrée à la façon des geometres , avec

quantité de propositions considerables, qui ont connexion avec elle. Si vous trouvés, Monsieur, que la communication du secret de la lumiere constante y puisse contribuer, je ne manqueray pas de le vous envoyer et vous pouvés compter là-dessus comme si vous l'aviés en main. Mais si je vous connois, je croy que vous ne ferés pas moins de cas de cette ouverture d'une nouvelle analyse veritablement geometrique, qui peut-estre aura un jour des suites extraordinaires.

§ IV.

Ad pag. 20 verba: *Voicy un exemple de ma methode des touchantes.*

Mirum videri nequit Leibnitium exeunte A^o. 1679, in variis ad Hugenum epistolis, calculi sui differentialis vel problematum hanc computandi artem spectantium mentionem fecisse (vid. ep. IV. p. 8. ep. VI. p. 17); quippe qui jam medio anno 1676 in litteris ad Oldenburgium scriptis istius calculi principia ejusque in tangentibus ducendis usum exposuerit. (Cf. Leibn. Op. T. 3. p. 80 sqq.) Quamvis igitur ex his Leibnitii ad Hugenum epistolis nullum argumentum peti possit, ad dirimendam quaestionem utrum Leibnitius verus habendus sit calculi differentialis auctor, necne; atque aliunde satis constet quam rationem hic in ducendis tangentibus secutus sit, haud tamen injucundum fore credo si illud ipsum novae methodi exemplum, de quo hoc loco agitur, cum lectoribus communicem, imprimis vero, quoniam, uti mox videbimus, hoc ipsum problema Hugenio ansam praebuit, suas in re gravissima vires periclitandi. Leibnitii autem scriptio a nobis reperta est in fasc. 3^o. aliis aliorum mathematicorum disquisitionibus a Hugenio asservatis interposita, eique Hugenus sua manu inscripserat: *R. a D^o. Leibnitz dum in Gallia agerem.* — Sequuntur jam Leibnitii verba.

Exemplum ex nova mea tangentium methodo ductum.

Sit (fig. 9) curva EE talis naturae, ut datis in recta AD velut axe quatuor punctis constantibus, A, B, C, D, et puncto curvae E, ac junctis quatuor rectis AE, BE, CE, DE, tunc summa quatuor solidorum sub ternis quibuslibet rectis praedictis aequetur solido ex

omnibus quatuor invicem ductis et datae rectae G applicatis facto. His positis, ex puncto dato E tangens ET axi occurrens in T ita educetur. Ex E demittatur in axem perpendicularis EF; ponamus autem (facilitatis gratia, ne signa mutare necesse sit) punctum F cadere inter A et T.

Constructio: exhibeantur rectae octo, quarum	prima	secunda	tertia	quarta	quinta	sexta	sept.	oct.	erit TF ad EF	ut summa quatuor harum rectarum priorum ad summam quatuor posteriorum (*)
	sit ad	sit ad	.	.	.	.	.	.		
	E F	E F	.	.	D F	C F	B F	A F		
	in rat. tripl.	in rat. tripl.	.	.	.	.	.	.		
	G ad	G ad	.	.	.	.	.	.		
	D E	C E	B E	A E	D E	C E	B E	A E		

(*) Notandum tamen, si punctum F cadat inter A et D, mutanda nonnihil esse signa et pro summis adhibendas differentias certo modo sumtas.

Hanc solutionem paucis calculi mei lineis invenio, per methodos autem publicatas, quippe quibus irrationales tolli opus est, credo vix aliquot diebus inventum iri, et fortasse ne vix quidem. Tollendo enim irrationales assurgetur ad altissimos gradus, quod non sine taedio fieri potest, et tamen postea, cum valores aut constructiones quaerimus, cogemur aequationis inutiliter exaltatae iterum depressiones investigare, qui labor in aequationibus decimum longe gradum excedentibus (qualis ista foret) saepe immensus est.

Hucusque Leibnitius. Est autem subtangentis curvae propositae constructio, quam commemoravit, verissima, eamque hoc loco, etsi inventu facillimam, paucis verbis demonstrare lubet, quoniam sic opportunitas nobis erit cum ea conferendi solutionem Hugonii, quam ex ipsius adversariorum libro F descriptam in sequenti § exhibebimus.

Sit

Sit itaque (fig. 9.) $DE=a$, $CE=b$, $BE=c$, $AE=a$,
 $DO=n$, $CO=o$, $BO=m$, $AO=q$.

Erunt igitur, si $OF=x$, $EF=y$; $DF=n-x$, $CF=o-x$, $BF=m-x$, $AF=q-x$.

$$\begin{aligned}\text{Nec non: } a &= \sqrt{y^2 + (n-x)^2} \\ b &= \sqrt{y^2 + (o-x)^2} \\ c &= \sqrt{y^2 + (m-x)^2} \\ d &= \sqrt{y^2 + (q-x)^2}.\end{aligned}$$

Et ex problematis conditione, curvae naturam exprimet sequens aequatio:

$$abc + abd + acd + bcd = \frac{abcd}{g}$$

Quae si differentietur, obtinebimus:

$$\left\{ \begin{aligned} &+bcd\delta a + ac\delta b + ab\delta c \\ &+bd\delta a + ad\delta b + ab\delta d \\ &+cd\delta a + ad\delta c + ac\delta d \\ &+cd\delta b + bd\delta c + bc\delta d \end{aligned} \right\} = \frac{1}{g} \left\{ \begin{aligned} &bcd\delta a + acd\delta b + abd\delta c + abc\delta d \end{aligned} \right\}$$

sive:

$$\left\{ \begin{aligned} &+ (bc + bd + cd - \frac{1}{g}bcd)\delta a \\ &+ (ac + ad + cd - \frac{1}{g}acd)\delta b \\ &+ (ad + bd + ab - \frac{1}{g}abd)\delta c \\ &+ (ab + ac + bc - \frac{1}{g}abc)\delta d \end{aligned} \right\} = 0.$$

Est autem :

$$\frac{b c d}{g} = \frac{a b c + a b d + a c d + b c d}{a}$$

$$\frac{a c d}{g} = \frac{a b c + a b d + a c d + b c d}{b}$$

$$\frac{a b d}{g} = \frac{a b c + a b d + a c d + b c d}{c}$$

$$\frac{a b c}{g} = \frac{a b c + a b d + a c d + b c d}{d}$$

Quibus valoribus in praecedenti aequatione substitutis, habebimus post reductionem :

$$b^2 c^2 d^2 \delta a + a^2 c^2 d^2 \delta b + a^2 b^2 d^2 \delta c + a^2 b^2 c^2 \delta d = 0.$$

Sive, quia

$$\delta a = y \delta y - (n - x) \delta x$$

$$\delta b = y \delta y - (o - x) \delta x$$

$$\delta c = y \delta y - (m - x) \delta x$$

$$\delta d = y \delta y - (q - x) \delta x$$

peracta omni reductione :

$$\left\{ \begin{array}{l} + b^3 c^3 d^3 \\ + a^3 c^3 d^3 \\ + a^3 b^3 d^3 \\ + a^3 b^3 c^3 \end{array} \right\} \times y \delta y - \left\{ \begin{array}{l} + b^3 c^3 d^3 (n - x) \\ + a^3 c^3 d^3 (o - x) \\ + a^3 b^3 d^3 (m - x) \\ + a^3 b^3 c^3 (q - x) \end{array} \right\} \times \delta x = 0.$$

E qua sponte sequitur :

$$\text{subnormalis} = \frac{y \delta y}{\delta x}$$

$$= \frac{b^3 c^3 d^3 (n - x) + a^3 c^3 d^3 (o - x) + a^3 b^3 d^3 (m - x) + a^3 b^3 c^3 (q - x)}{b^3 c^3 d^3 + a^3 c^3 d^3 + a^3 b^3 d^3 + a^3 b^3 c^3}$$

(10)

Adeoque etiam , cum subtang. = $\frac{y^2}{\text{subnorm.}}$, Subtang = TF

$$= \frac{y^2 b^3 c^3 d^3 + y^2 a^3 c^3 d^3 + y^2 a^3 b^3 d^3 + y^2 a^3 b^3 c^3}{b^3 c^3 d^3 (n-x) + a^3 c^3 d^3 (o-x) + a^3 b^3 d^3 (m-x) + a^3 b^3 c^3 (q-x)}.$$

Sive denique , hujus fractionis numeratorem et denominatorem per $\frac{a^3 b^3 c^3 d^3}{g^3}$ dividendo :

$$\frac{\text{TF}}{y} = \frac{\text{TF}}{\text{EF}} = \frac{\frac{y g^3}{a^3} + \frac{y g^3}{b^3} + \frac{y g^3}{c^3} + \frac{y g^3}{d^3}}{\frac{(n-x) g^3}{a^3} + \frac{(o-x) g^3}{b^3} + \frac{(m-x) g^3}{c^3} + \frac{(q-x) g^3}{d^3}}.$$

Quae aequatio subtangentis constructionem offert, qualem Leibnitius annuntiaverat.

§ V.

Ad epist. 12^{am}. pag. 29. sqq.

Est certe haec epistola inter paucas memorabilis. In ea enim prima vice legimus Hugonii de calculo differentiali iudicium; quod Leibnitio eo magis gratum et acceptum esse debuit, quia Hugonius, postquam novam hanc computandi rationem accurato subjecerat examini, eam perquam bonam utilemque et habuit et pronuntiavit. Neque hoc tantum. Sed repetitum hic videmus, quod jam antea scripserat Hugonius (in ep. 11^a. p. 28) se nempe sibi videri similis artificii compotem esse, cujus ope eadem praestare posset, quae Leibnitius calculi differentialis auxilio. Quod sane verissimum est, si eo sensu haec verba accipiantur ut significant, Hugonium tanta valuisse ingenii vi, ut graviora etiam problemata (quamvis non omnia) quibus solvendis calculus differentialis egregie inservit, non tantum tentare ausus fuerit, sed etiam, licet calculi istius subsidiis destitutus, penitus perspexerit, saepiusque longe ante alios explicuerit. Exstant hujus rei exempla uno plura. At juvat haec novis augere, et quidem illis ipsis, quae Hugonius, ut verbis suis fidem faceret, in hac sua epistola excitavit; quorum alterum pertinet ad Leibnitii problema de linea aequalis descensus, alterum ad ejusdem de tangentibus doctrinam. Dederat nempe quondam Hugonius prioris problematis solutionem, demonstrationem vero reticuerat; haec autem cum nobis servata sit, cumque et elegantia et perspicuitate nulli alii cedat, et insuper probet, quam defendimus sententiam, suo quodam jure locum hic sibi vindicat. Idem dictum volo de altero problemate, eodem ille, cui explicando para-

graphum proxime praecedentem dicavimus, et quod, quamvis ad difficiliora pertinens, Hugonii tamen ingenio non fuit inaccessum. Ad illud enim solvendum cum solita praecepta deficerent, novam sibi quae propriam viam ingressus est Hugonius, qua, ingentes difficultates sollerter evitans, brevi eo pervenit, ut eandem, quam Leibniti, exhiberet subtangentis constructionem. Quid vero multa? Ea ipsa, quam se absolvisse h. l. annuntiat Hugonius, de catenariae curvae disquisitio, si quae alia, monstrat quid praestare potuerit. Mirabundi vero legimus Hugonem 15 demum annorum juvenem eandem quaestionem sibi examinandam proposuisse, et quamvis juvenili ista aetate ipsi non fuisset concessum omnia huc spectantia luce collustrare, se tamen isto jam tempore nonnullorum hac in re errores detexisse, et Mersennio demonstrasse, quid ne isti errarent, contingere oporteret. Quae omnia ne jactanter aut temere enuntiata viderentur, testimonia quaesivimus, inventaque produximus, quae ostendunt auctoris nostri assertionem veritati esse consentaneam. Denique (veluti haec omnia nondum sufficerent) exeunte hac epistola, Hugonius ita de causticis loquitur, ut Tschirnhusio, (qui istarum curvarum auctor haberi solet) inventionis laudem quodammodo dubiam reddat. Quibuscum si conferantur quae noster scripsit in ep. ad Leibn. 23. p. 81. sq. et ad Hospit. 22. pag. 287., patebit ipsum sibi istarum curvarum originem vindicare. Quod quo jure fecisset cum perquireremus, non tantum recte eum egisse reperimus, sed multa quoque alia invenimus, quae cum in disciplinarum historiae commodum et augmentum converti queant, hic a nobis describenda esse putavimus.

Ordine jam explicemus quae hac paragrapho commemoravimus; atque ita agmen ducat demonstratio, quam concinnavit Hugonius, ut solveret problema Leibnitianum de linea descensus aequalis. Sequentia ea de re conscripta invenimus in Advers. Libr. G pag 47.

Sit inveniendae curva ACE (fig. 10), per quam devolutum grave corpus descendat aequalibus spatiis horizontem versus per temporis partes aequales.

Hoc fieri nequit incipiendo descensum e summo curvae puncto A, quia sive per rectam inclinatam ad horizontem, sive per perpendiculararem, semper, per prima tempora minima aequalia, erunt spatia peracta ut 1, 3, 5, 7, etc. Curvae autem minima particula tamquam recta censetur. Oportet itaque descendisse per BA. Et in perpend. AD intelligantur particulae aequales, AT, TV, VX, XF, etc., et ducantur ad curvam horizontales TR, VS, XH, FC, etc. Jam accipiendo particulas curvae AR, RS, SH, HC, tamquam rectas, per quas mobile descendere pergat post casum per BA, peragi oportet has particulas temporibus aequalibus, quia sic mobile aequalibus intervallis horizontali plano appropinquabit. Peragentur autem temporibus aequalibus, si eadem proportione crescant earum longitudines, quae augentur celeritates, ut facile perspicitur. Sunt autem celeritates in punctis curvae singulis sicut ipsae respondententes applicatae in parabola KNM, posito vertice parabolae K eadem altitudine ac punctum B, et axe KO parallelo BD. Ergo et longitudines particularum curvae AR, RS, SH, HC, eadem proportione crescere debent atque applicatae illae incipiendo ab LM. Sit MP parallela LO. Et referent partes aequales applicatarum, rectangulo MO inclusae rectas omnes particulas AT, TV, VX, etc. ipsae vero applicatae in parabola integrae inter LM et ON referent omnes particulas curvae AR, RS, SH, etc. Eritque semper ut YZ ad ΔZ, quae aequalis ML, ita particula respondens curvae HC ad rectam XF, quia prima particula AR aequalis censetur AT; sicut applicata ML aequalis est lateri ML rectanguli MO. Sit SG perpend. in HX, similiterque in ceteris curvae intersectionibus in proxime subjectas horizontales ductae intelligantur perpendiculares.

Jam cum sint inter se YZ ad $Z\Delta$, sicut SH ad VX sive SG , erit et quadr. SG ad differentiam quadratorum SH, SG , hoc est ad quadr. HG , sicut quadr. ΔZ ad differentiam quadratorum $YZ, \Delta Z$; sive ut quadr. ML ad differentiam quadratorum YZ, ML . Sit vertice L axe LO parabola $L\Pi Q$ similis KMY , hoc est idem latus rectum habens, quae secet applicatam ZY in Π , erit jam quadr. ΠZ aequale differentiae quadratorum $YZ, \Delta Z$, sive quadratorum YZ, ML , ut facile ostenditur. Ergo erit jam quadratum ΔZ ad quadr. ΠZ , ut quadr. SG ad quadr. HG . Et proinde etiam ΔZ ad ΠZ longitudine, ut SG sive VX ad HG , atque ita omnes applicatae in parabola $L\Pi Q$ referent omnes S, V, H, G , etc., sibi respondentes altitudine. Ideoque erit spatium semiparabolae $L\Pi QO$ ad rectang. MO sicut omnes SV, HG , etc., hoc est sicut recta ex iis composita ED ad rectam DA .

Sit BA vel $KL = a$. Latus rectum parabolae r . Item $AD = x$ $DE = y$. Est ergo $OQ = \sqrt{rx}$, et spat. semiparabolae $LQO = \frac{2}{3}$ rectang. OL, OQ , hoc est $= \frac{2}{3} x \sqrt{rx}$. Rectangulum vero $MO = x \sqrt{ar}$. Ergo $\frac{2}{3} x \sqrt{rx}$ ad $x \sqrt{ar}$ ut y ad x ; unde $\frac{2}{3} ay^2 = x^3$. Unde liquet curvam ACE esse paraboloidem, in qua quadrata applicatarum ad axem AD sunt ut cubi abscissarum inter applicatas et verticem A , cujusque latus rectum $= \frac{2}{3} BA$.

Altero jam loco explicandum est quo artificio usus sit Hugenius, ut tangentem duceret ad curvam istam, quam in paragrapho praecedenti, duce Leibnitio, examinavimus. Qua in re ut ordine procedamus, primum h. l. ex Adversar. Libro F paginam 272 describemus; quippe quae peculiarem methodum tangentium inveniendarum continet, si curvae natura expressa sit functione radiorum e punctis datis ad curvam ductorum. Hanc methodum his verbis exposuit Hugenius:

Ratio inveniendarum tangentium in curvis lineis.

Ponatur (fig. 11) CD esse tangens quaesita in puncto C , in ea proxime puncto C accipi intelligitur punctum D , quod idem in curva proposita esse censetur. Ex D cadant perpend. in AC et BC , nempe DF , DE . Recta AC superare censetur rectam AD differentia FC , quia DF minima respectu AF . Item BD superare censetur rectam BC differentia CE . CE vocatur x , CF y , quarum si inter se ratio cognoscatur, dabitur D punctum in concursum perpendicularium ED , FD , adeoque tangens CD . Ista vero ratio investigatur ex aequatione, in qua ponitur parte una proprietas curvae lineis datis AC , CB expressa, parte altera eadem proprietas expressa lineis AD , DB , seu pro iis AF , EB . Vel tantummodo exprimatur proprietas curvae positus $a+x$ et $b-y$ pro a et b , et deleantur omnia praeterquam in quibus unum x aut y , et deleantur etiam in quibus x et y conjunctim. Reliqua dabunt rationem x ad y ac proinde tangentis constructionem.

Praeceptum suum Hugenius nonnullis exemplis illustravit, veluti, si BC sit a , et AC vocetur b , ellipsos natura ea erit, ut semper $a+b=d$, si nempe d sit linea data. Hinc, si in ista aequatione pro a substituatur $a+x$, et pro b , $y-b$, habebimus:

$$a+x+b-y=d.$$

Sive, quoniam $a+b=d$, $x-y=0$. Unde $x=y$. Quae aequatio significat angulum ECF a tangente bifariam dividi.

Parabolae, cujus abscissae vocantur a , ordinatae b , incrementa abscissarum x , et ordinatarum y , latus vero rectum r , haec erit aequatio (1)

$$ar=bb,$$

in

(1) Animadvertendum est h. l. Hugenium ipsa parabolae natura quasi coactum fuisse, ut suam methodum ad hujus curvae abscissas et ordinatas applicaret. Quid mirum quod et hic eventus methodum comprobaverit!

in qua si ponatur $a-x$ pro a , et $b-y$ pro b , habebimus:

$$ar-rx=bb-2by+yy,$$

quae aequatio transit in $rx=2by$

et hanc proportionem exhibet, $x:y=2b:r$.

Sic etiam, si in aequatione circuli

$$aa+bb=dd.$$

ponatur $a+x$ pro a , et $b+y$ pro b , erit

$$aa+2ax+xx+bb+2by+yy=dd,$$

quae aequatio, propter evanescentes xx et yy , fiet,

$$2ax=2by$$

unde sequitur

$$x:y=b:a.$$

His aliisque levioris momenti exemplis praemissis, pergit Hugenus ad eas examinandas curvas, quarum natura exprimitur aequatione, quae functio est trium pluriumve rectarum, a datis punctis ad curvam ductarum; in quo examine ita eum versatum esse exempla a nobis reperta docent, ut sibi finxerit duo curvae propositae puncta proxime subsequencia, identidem vero in curvae tangente sita, a quorum puncto alterutro ad alterum dum datae rectae procedant, singulae variationem subeunt, e curvae natura definiendam. Has vero variationes Hugenus universe exprimit functione tum incrementi variationis arbitrariae unius harum rectarum, tum quantitatum cognitarum, tum denique subnormalis curvae propositae. Quae variationes si cum suis signis applicentur quantitativis variabilibus, in aequatione curvae occurrentibus, producta vero et potestates quantitatum infinite parvarum respectu reliquorum terminorum negligentur, ipsa vero aequatio resultans divisione liberetur a variatione arbitraria superstite, sponte sese nova offeret aequatio, cujus auxilio subnormalis nullo fere negotio determinari poterit.

Haec universa agendi ratio, quam ex paucis, quae breviter annotavit Hugenus, exemplis effecimus, jam eo ipso problemate il-

lustrabitur, cujus solutionis exhibendae gratia totam hanc suscepimus disputationem. Quaeritur itaque quomodo tangens ducenda sit ad curvae punctum, cujus aequatio est

$$abc + abd + acd + bcd = \frac{abcd}{g}.$$

in qua, (fig. 12) $BH = a$, $AH = b$, $LH = c$, $MH = d$, sunt quantitates variables: $BN = n$, $AN = o$, $LN = m$, $MN = q$, sunt quantitates datae atque constantes. Jam sit H punctum curvae, et K aliud punctum priori proxime adjacens, nec non in curvae tangente KH positum. HO sit normalis curvae in H , adeoque tangenti ad angulos rectos insistens. $HN = p$ sit ordinata, adeoque $ON = x$ subnormalis.

Fingamus jam rectam BH augeri quantitate $PH = e$; tum, si e K ducantur perpendiculares KX , KW , KV in rectas HA , HL , HM , variationes simultaneae, quas hae patientur, exprimentur respective lineolis HX , HW , HV , quarum valores jam exhibendi sunt functione variationis arbitrariae e , subnormalis x , et quantum constantium. Nihil vero facilius. Etenim si ex O in rectas HB , HA , HL , HM , dimittantur perpendiculares OR , OS , OT , OU , e triangulis similibus sequentes deducemus proportionem:

$$BH:HN = OB:OR, \text{ sive } a:p = x-n : \frac{p(x-n)}{a}$$

$$AH:HN = OA:OS, \text{ „ } b:p = o-x : \frac{p(o-x)}{b}$$

$$LH:HN = OL:OT, \text{ „ } c:p = m-x : \frac{p(m-x)}{c}$$

$$MH:HN = OM:OU, \text{ „ } d:p = q-x : \frac{p(q-x)}{d}$$

Sunt vero etiam triacula HOR et KHP , HOS et KHX , HOT et KHW , HOU et KHV similia. Hinc

$$\text{OR:OS}=\text{PH:HX}, \text{ sive } \frac{x-n}{a} : \frac{o-x}{b} = e : \frac{ae(a-x)}{b(x-n)}$$

$$\text{OR:OT}=\text{PH:HW}, \text{ „ } \frac{x-n}{a} : \frac{m-x}{c} = e : \frac{ae(m-x)}{c(x-n)}$$

$$\text{OR:OU}=\text{PH:HV}, \text{ „ } \frac{x-n}{a} : \frac{q-x}{d} = e : \frac{ae(q-x)}{d(x-n)}$$

Itaque rectarum HB, HA, HL, HM, variationibus suis affectarum sequentes erunt valores:

$$\text{BH}+\text{HP}=a+e$$

$$\text{AH}-\text{HX}=b-\frac{aeo-aex}{bx-bn}$$

$$\text{LH}-\text{HW}=c-\frac{aem-aex}{cx-cn}$$

$$\text{MH}-\text{HV}=d-\frac{aeq-aex}{dx-dn}$$

Qui si substituantur in aequatione curvae naturam referente, nempe in

$$abc+abd+acd+bcd=\frac{abcd}{g}$$

sequentem obtinebimus aequationem, neglectis nempe terminis secundis, uti vocantur, ordinis:

$$\left(\begin{array}{l} +bcd+abc+abd+acd+bce+bde+cde \\ -\frac{abdem-abdex+a^2bem-a^2bex+a^2dem-a^2dex}{cx-cn} \\ -\frac{acdeo-acdex+a^2ceo-a^2cex+a^2deo-a^2dex}{bx-bn} \\ -\frac{abceq-abces+a^2beq-a^2bex+a^2ceq-a^2cex}{dx-dn} \end{array} \right) \left(\begin{array}{l} \frac{abcd}{g} + \frac{bcde}{g} \\ -\frac{a^2bdem-a^2bdex}{cgx-cgn} \\ -\frac{a^2cdeo-a^2cdex}{bgx-bgn} \\ -\frac{a^2bceq-a^2bcex}{dgx-dgn} \end{array} \right)$$

Quia vero

$$bcd+abc+abd+acd=\frac{abcd}{g}$$

ultima aequatio dividi poterit per e , eaque, sublato denominatore, fit:

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{aligned} & +b^2c^2dgx - b^2c^2dgn - ab^2d^2gm + ab^2d^2gx - a^2b^2dgm + a^2b^2dgx - a^2b^2d^2gm + a^2b^2d^2gx \\ & +b^2c^2d^2gx - b^2c^2d^2gn - ac^2d^2go + ac^2d^2gx - a^2c^2dgo + a^2c^2d^2gx - a^2c^2d^2go + a^2c^2d^2gx \\ & +b^2c^2d^2gx - b^2c^2d^2gn - ab^2c^2gq + ab^2c^2gx - a^2b^2c^2gq + a^2b^2c^2gx - a^2b^2c^2gq + a^2b^2c^2gx \end{aligned} \right\} \\ & = \left\{ \begin{aligned} & -b^2c^2d^2n - a^2b^2d^2m - a^2c^2d^2o - a^2b^2c^2q \\ & +b^2c^2d^2x + a^2b^2d^2x + a^2c^2d^2x + b^2d^2c^2x \end{aligned} \right\} \end{aligned}$$

adeoque

$$\begin{aligned} & +a^2b^2d^2m + b^2c^2d^2n - \left\{ \begin{aligned} & b^2c^2dn + ab^2d^2m + ac^2d^2o + ab^2c^2q \\ & b^2cd^2n + a^2b^2dm + a^2c^2do + a^2b^2cq \\ & bc^2d^2n + a^2bd^2m + a^2cd^2o + a^2bc^2q \end{aligned} \right\} g \\ & +a^2c^2d^2o + a^2b^2c^2q \\ x = & \frac{\begin{aligned} & +a^2b^2d^2 + b^2c^2d^2 - \left\{ \begin{aligned} & b^2c^2d + ab^2d^2 + ac^2d^2 + ab^2c^2 \\ & b^2cd^2 + ab^2d + a^2c^2d + a^2b^2c \\ & bc^2d^2 + a^2bd^2 + a^2cd^2 + a^2bc^2 \end{aligned} \right\} g \\ & +a^2c^2d^2 + a^2b^2c^2 \end{aligned}}{abc + bcd + acd + abd} \end{aligned}$$

In qua denique si pro g substituatur ejus valor $\frac{abcd}{abc + bcd + acd + abd}$,
levi peracta reductione, habebis:

$$x = \frac{a^3b^3d^3m + b^3c^3d^3n + a^3c^3d^3o + a^3b^3c^3q}{a^3b^3d^3 + b^3c^3d^3 + a^3c^3d^3 + a^3b^3c^3}$$

qui est idem ipse subnormalis valor, quem supra (pag. 18) exhibuimus et calculi differentialis auxilio invenimus. Nam quantitates, quae ibi vocantur $n-x$, $o-x$, $m-x$ et $q-x$, hic sunt simpliciter n , o , m et q .

Ex hac igitur solutione apparet quam vere Hugenius scripserit se sua methodo eandem invenire constructionem quam Leibniti, neque ad hoc aut novo calculo aut novis signis indigere, atque eadem ratione rem peragi in iis omnibus curvis, quae *simili ratione* construantur.

Atque haec quidem de hoc problemate sufficiant, in quo elaborando Hugenius occupatus fuisse videtur prioribus mensibus anni 1687: quemadmodum e temporis notis, variis paginis Adversariorum Libri F, inscriptis, effecimus.

Pergendum est ad ea explicanda quae Catenariam spectant; qua in re initium nobis erit ab iis epistolis, quas de hoc argumento secum invicem communicarunt Hugenius et Mersennus.

Inventionis suae demonstrationem Hugenius in epistola (¹) ad Mersennum, cui tamen temporis nota deest, his verbis commemorat :

» Je finiray icy de peur de ne vous detenir pas trop longtemps, et vous enverray, par une autre lettre, la demonstration de ce qu'une corde ou chaine pendue ne fait point une parabole, et quelle doit estre la pression sur une corde mathematique, ou sans gravité, pour en faire une, dont j'ay aussi trouvé la demonstration il n'y a pas longtemps. » etc.

Ad quae Mersennus respondit 16 Nov. 1646 in epistola (²) cujus hoc est initium :

Monsieur,

Le peu de temps qui m'est resté, depuis votre demonstration receue, ne m'a pas permis de vous escrire des centres de percussion; ce sera, Dieu aydant, à l'autre voyage, ou du moins lorsque j'auray receu l'autre demonstration, que vous m'assurez, qui prouve que la chaine, ou la corde bandée, en s'affaissant de son poids propre au milieu, ne fait pas la parabole, comme avoit cru Galilée, et de plus en

(¹) Exstat haec epist. in MSS. fasc. I.

(²) Exstat haec epistola in MSS. fasc. V. Ex his autem Mersenni epistolis, temporum notis instructis, apparet Hugenum annos egisse 17, cum suas de Catenaria demonstrationes ad Mersennum mitteret. Nihil igitur obstat quo minus Hugenio fidem habeamus dicenti se aetatis anno 15. demonstrationum istarum fundamenta posuisse.

quelle maniere doit estre la pression pour lui faire faire la dite parabole. Et, si vous ajoutez comment il la faut presser pour luy faire faire l'hyperbole et l'ellipse, vous vous surmonterez vous mesme.

Je vous assure que j'ay si fort admiré la gentillesse de vostre demonstration des cheutes, que je croy que Galilée eust esté ravi de vous avoir pour garand de son opinion. Ce n'est pas qu'il ne m'y reste quelque scrupule, mais j'ay cru mieux attendre à vous le proposer, lorsque vous seriez icy (car M. vostre pere, l'honneur des Muses, me le fait ainsi esperer). J'ay oublié à scavoir de luy si vous scavez toucher le Luth. Si cela est, je vous prie de voir si vous soudriez bien ce beau probleme, à scavoir, pourquoi la chorde $AB \overset{C}{\text{---}}$ telle que vous voudrez, par exemple la chanterelle, attachée fermement en A, et faisant quelque son, doit elle estre tendue en B 4 fois plus fort que devant, pour monter à l'octave, veu qu'il ne faut l'accourcir de moitié en C, pour la faire monter à la dite octave. J'entrevoiy que vostre fondement de mechaniques, à scavoir que pour faire un mouvement 2 fois plus viste, il faut peut-estre une force quadruple, vous fera l'ouverture de la demonstration, laquelle me sera bien pretieuse de vostre main. etc.

Rescripsit vero Hugenius, sed quo tempore latet. (¹)

Mr. Avant-hier estant arrivé à la Haye, j'ay eu le bonheur d'y rencontrer votre lettre avecq les beaux caracteres, dont il vous a pleu me faire part. Touchant le probleme de musique, que vous me proposez, *amplius deliberandum censeo*. L'ayant trouvé dans vostre livre de physico-math., j'y ay souvent faict des speculations dessus; mais la solution en est bien difficile, à ce que je voy, et il

(¹) Etiam haec ep. invenitur in MSS. fasc. I.

le faut bien de nécessité, car autrement elle n'eust pas esté ignoré de tant de braves esprits jusqu'a présent.

A cette heure voyez comment vous aggrée celle-cy touchant l'affaire de la chaisne. »

Quod vero ad hanc demonstrationem attinet, in ipso quod citavimus epistolae fragmento, non nisi perpauca huc spectantia supersunt, in adjectis autem et cum isto fragmento una asservatis schedis, plura quidem occurrunt, sed neutiquam perfecta nec absoluta. Meliori ordine disposita et magis elaborata sunt ea, quae de eodem hoc argumento litteris consignavit Hugenius in libello jam supra citato, cui titulus: *puerilia pleraque*, e quo itaque demonstrationem, quoad Catenariam, quamvis forte non eandem quae ad Mersennum missa fuit, descripsimus. Est ea sequens:

De catena pendente.

Propos. 1^a. Si pondus suspendatur ex duobus funibus, hi producti secabunt sese in pendula ponderis gravitatis diametro.

Sit (fig. 13) pondus D A C, cujus pendula gravitatis diameter A B, suspensum ex funibus E D, F C, ligatis in punctis C et D. Dico, si prolongentur ii funes, intersecturos se invicem in B, puncto, quod est in pendula gravitatis diametro.

Intelligatur enim primo E B, F B due esse funes in B, annexi extremitati bacilli B A, cujus alteri extremitati affixum sit pondus D A C ex suo gravitatis centro A, et bacillus A B horizonti perpendicularis, ita ut pondus D A C bacillo innitatur, bacillus vero in puncto B duobus funibus E B, F B, quorum ligatura in D et C omnino soluta sit; manifestum itaque est, pondus sic suspensum, non decisurum ad hanc vel illam partem: admoveantur nunc funes E B, F B, punctis D et C ibique firmentur, et tamen pondus in

eodem situ manebit. At jam non amplius baculo neque puncto B innitetur, sed suspensum erit ex funibus ED, FC; et hi producti in pendula gravitatis diametro se intersecant. Quod erat probandum.

Sequitur ex hoc theoremate, si (fig. 14) in fune EDACF, nexa sint pondera G et H aequalia, in punctis D et C, haec non posse ullo situ pendere, nisi ut productae ED, FC concurrant in eodem puncto B, quod in eorum pendula gravitatis diametro sit, quae diameter, si pondera aequalia sint, secat partem funis interjectam inter ponderum ligaturas D, C, in duas aequales partes; si autem D majus esset H, secaret ipsam DC, ita ut pars AD esset ad pondus H, ut pars AC ad pondus G.

Si enim DC rigidum supponatur, apparet ex praecedenti theoremate non posse pondera alio situ suspensa manere, nisi ut ED, FC, productae conveniant in eodem puncto cum gravitatis diametro; at in eo situ non manerent, nisi eorum centrum gravitatis A tunc centro terrae, quam proxime potest, admotum esset; ergo et hic, ubi DC rigida non est, sed tamen tensa semper, ut et aliae ED, FC, apparet centrum eorum gravitatis A centro terrae propius admoveri non posse, ac proinde quoque praedicto situ suspensa manere debere.

Propos. 2^a. Propositus nunc sit (fig. 15) funis ADG, in quo aequalibus intervallis ligata sunt aequalia pondera.

Manifestum itaque est, eo situ ea pendere debere, ut bina quaeque internodia, relicto uno intermedio, producta sese intersecant in pendula duorum ponderum gravitatis diametro. Sic BC, ED sese intersecant in puncto N, quod est in pendula gr. diametro ponderum suspensorum ex C et D. Dicantur enim BC et ED invicem non secare in N. Si ergo firmentur puncta B et E in eisdem punctis, ubi nunc pendent, hoc quidem situm punctorum C et D nihil immutabit; sed firmatis iis, pondera ex C et D aliter non possunt suspendi, quam
ut

ut intersectio productarum BC , ED sit in pend. grav. diametro. Ergo apparet et ante sic suspensa fuisse. Eodem modo demonstrari potest, AB et DC se intersectare in pend. gr. diametro ponderum ex B et C pendentium, et ita de quotlibet aliis in infinitum ascendentibus. Facile hinc erit, si nota habeamus tria puncta, C , D et E catenae hujus, caetera quoque invenire ut B , F , A , G . Oportet enim DE bifariam dividere in I et agere IO parallelam ipsi SD , et ex O , ubi producta CD illam IO secat, per E ducere OF et ponere EF aequalem DE , et habebimus punctum F . Simili modo et reliqua reperiri possunt.

Propos. 3^a. Linea, quae per haec puncta ducitur, valde parum distare videtur a linea parabolica, quam tamen non refert. Quod sic demonstrabitur.

Describatur per puncta C , D , E , parabola $CDER$, dico hanc non transire per punctum F . Fiat enim ut OD ad DC , sic OE ad ER , quae signetur in OEF producta; dico primo punctum R esse in eadem linea parabolica cum punctis C , D , E . Producat enim OI ducaturque CR , quae ipsam secet in T ; et quoniam est DC ad ER ut OD ad OE , linea autem OT secat ipsam DE bifariam, manifestum quoque est, ipsam CR bifariam sectam in T ; porro cum puncta C , D , E , sint in parabola, et CT aequalis TR , et CR aequidistans ipsi DE , necessario quoque punctum R erit in eadem parabolica linea, alias enim OT non esset parabolae diameter, per 28^{am} Con. Apoll. lib. 2ⁱ. Quod absurdum esset, quia axi DS parallela est, ex constructione. Cum itaque punctum R sit in parabolica linea eadem in qua est punctum E , sequitur punctum F in ea non posse esse, quia deberet recta linea OR parabolam in tribus punctis secare, quod absurdum est: vel punctum R coincidere cum puncto F , quod impossibile est, cum OE semper major sit OD , et quam proportionem habet OD ad DC , eam habeat OE ad ER .

Ergo ER semper quoque major DC sive EF , et idcirco puncta R et F non possunt coïncidere.

Postquam itaque vidimus pondera aequalia aequalibus internodiis ligata non pendere secundum lineam parabolicam, quaeramus nunc quae internodiorum debeat ad invicem esse proportio, secundum quam pondera aequalia ex chorda religata secundam lineam parabolicam pendeant.

Propos. 4^a. Sit igitur (fig. 16) data linea parabolica $A B C D E F$, cujus axis horizonti perpendicularis, et sint nectenda ex chorda aliqua pondera quotlibet aequalia, quae, si certa ratione quadam suspendantur, puncta, in quibus chordae alligatae sunt, omnia sint in data linea parabolica.

Ducatur ζZ , quae parabolam in vertice contingat, ideoque sit ad axem GC ad angulos rectos, et ponatur utcumque BC eique aequalis CD , ita ut puncta B et D sint in data parabola; dividatur porro CD bifariam in L et parallela axi GC ducatur QLH , quae a producta BC secetur in H : fiat vero ut CH ad CB , ita HD ad DE , eaque ponatur in producta HD . DE rursus bifariam secetur in M et ducatur axi GC parallela PI , et ex I , ubi illa intersecatur a producta CD , ducatur per E linea $IENF$, et sit ut ID ad DC sic IE ad EF . Ab altera parte axis similiter inveniatur punctum A , etc. Sic inventa puncta erunt in data parabolica linea, id enim simili modo prebari potest, quo in 3^a prop. probatum est punctum R in eadem linea parabolica esse in qua puncta C, D, E ; haec enim simili modo, quo illud, inventa sunt. Si ergo per puncta A, B, C, D, E, F chorda tendatur, et in unoquoque horum punctorum aequale pondus nectatur, et haec catena ex duobus quibuslibet eorundem punctorum (sumamus A et F) suspendatur, dico praestitum esse quod postulabatur. Situm enim hunc retinebunt, cum, ex constr., bina quaeque internodia, puta BC et ED , intermedio relicto uno CD , se inter-

secent in pendula duorum ponderum gravitatis diametro in H; et demonstratum jam est in data parabola esse.

Manifestum hinc quoque est, si aequalia pondera secundum parabolicam lineam pendeant, tunc si producantur BC, ED, fore, ut HC ad CB, sic HD ad DE.

Varia autem hic contemplanda occurrunt, et quidem prae caeteris notatu dignum, quod chordae FZ, EY, DX, et C π etc., ex quibus pondera haec dependent, omnes aequalibus intervallis distant, id est, si secentur a linea ζ Z, spatia interjecta ZY, YX, XC etc. omnia esse aequalia. CH enim aequalis est CL; ergo quia, sicut HC ad CB, sive ut CL ad CD, sic HD ad DE, erit quoque DE dupla DH; quia autem HD est ad DK, ut DE ad EW, erit etiam WE sive XY dupla XD sive $\frac{1}{2}$ X, id est aequalis CX. Similiter de spatio ZY demonstratur; quia enim ID est aequalis DL, sive dimidia DC, et est, sicut CD ad DI, ita FE ad EI, erit et ideo EF dupla EI, et consequenter spatium ZY, aequale spatio YX. Apparet ergo hinc, si puncta B, C, D, E, F, sint in linea parabolica, spatia CX, XY, YZ esse aequalia; conversum autem aeque verum est, nempe si haec spatia aequalia sunt, puncta B, C, D, E, F in linea parabolica esse: cum enim XY data est aequalis CX, data est linea YE, et cum sit quoque data HE, data etiam est earum intersectio E, quae non potest nisi in unico puncto esse.

Hinc sequitur, (2) quod si loco appensorum ponderum imponantur punctis A, B, C, D, E, parallelepipeda aequalia A α β T, BVGR, BGSD, W γ δ E, ex materia qualibet, quarum alterum alterius pressionem non impediat, relinquatur autem appensus pondus π , chordam eandem situm retenturam, quem habuerat appensis

(2) In margine ad hunc locum propria manu annotavit Hugenius: *non sequitur, neque est verum.* 1668.

ponderibus. Et quantumvis extremitates chordae A, F , aperiuntur, semper tamen puncta, in quibus parallelepipeda haec premunt, fore in linea parabolica; semper enim premetur chorda ab aequalibus ponderibus, quae sita erunt ex aequalibus distantis, ut erant ante.

Notandum quoque est, quia CX, XY, YZ sunt spatia aequalia et puncta C, D, E, F sunt in parabola, quam ζZ contingit in vertice C , spatium DX esse 1, spatium EY , 4, spatium FZ , 9, et sic porro secundum seriem consequentium quadratorum.

Praeterea notandum triangula omnia, CHD, DIE, EKF , esse aequalia, singula vero triangulo CRD .

Possunt autem et cylindri sumi, qualis hic appositus est AB , (fig. 17) in medio magno foramine CD perforatus, per quod trahenda est chorda. Si enim quotlibet talium cylindrorum ex chorda suspendantur (chordam autem nullius ponderis esse, et cylindros mutuo contactu a pressione nihil impediri postulo) pendebunt secundum lineam parabolicam, ut videre est in cylindrulis R ; quantumvis etiam extremitates chordae PQ dilatentur vel conjungantur.

Hactenus Hugenius de hoc argumento. Ut jam diximus, demonstratio, quam exhibuimus, non ea ipsa forma induta Mersenno ab Hugenio missa est, quemadmodum apparet ex hujus responso, quo, quamvis Hugenum in coelos efferat, simul tamen dubitationem aliquam sibi superesse fatetur. Sed ipsum Mersennum audiamus. Epistola scripta est Parisiis 24^o Jan. 1647. (1)

Mr. Après avoir admiré vostre speculation de la chorde, qui ne fait pas la parabole, je vous diray seulement, qu'encore que tout ce qui y est, soit veritable, ce n'a pas neantmoins esté par la force de vos demonstrations, que la verité nous y a paru, car il faudroit, ce me semble, commencer par vostre corollaire de la 2^e prop. et

(1) Exstat haec in MSS. fasciculo 5^o.

la démonstrer , et puis vous pourriez démonstrer le 1^{er}. et le 24. theoreme , et le reste iroit assez bien, semblablement à la fin de la 4^e. page: *hoc tamen eorum situm nihil immutabit*, NULLA ENIM CAUSA EST. Encore que vous n'y voyez point de cause, il ne s'en-suit pas, qu'il n'y en ait; nous ne voyons pas tout de premier abord, et ce qui ne nous paroist pas en un temps, paroist souvent dans un autre. Il suffit qu'on puisse douter qu'il y ayt quelque cause.

Ce que je ne vous dis pas pour amoindrir l'excellence de vostre speculation, à Dieu ne plaise, car je continue toujours en mon mesme advis de la grandeur de vostre genie. Seulement ne forcez pas trop vostre esprit, car vous avez tant d'années de reste, que quand vous ne feriez qu'une demonstration chaque année, aussi belle que celle de cette chorde, vous auriez assez pour tenir le haut bout parmi toute la noblesse.

Mersenni objectionibus an responderit Hugenus nescio, plura enim de hoc argumento ab eo conscripta non reperi. Neque etiam multum interesse videtur; quae enim retulimus satis docent Hugenum 17 vel 18 annos natum haud contemnenda de problemate protulisse, quod 40 annis post omnibus totius orbis terrarum geometris propositum, non nisi a tribus fuit solutum, inter quos ipse omnium primus exstitit. Haec ipsa, de qua agimus, epistola hujus disquisitionis primitias continet sed sub grypho latentes, quod ideo se fecisse ait auctor, ne Leibnitio opportunitatem praeccluderet eadem inveniundi, et calculi sui novi usum in ea quaestione experiundi. Ut autem appareat quid istud aenigma significet, et quales, haud diu post evulgatum problema, Catenariae proprietates invenerit Hugenus, hoc loco dicti gryphi explicationem dabimus quam ipse in Libro suo Advers. G. p. 22, 23 et 24, nobis servavit. Prius vero monendum est nos hanc aenigmatis solutionem non reperisse, antequam ipsa epistola jam typis erat mandata, quo factum est, ut, cum

signorum, quibus constat, significatus nobis non esset perspectus, in his pauca quaedam irrepserint vitia, quae hac occasione erunt tollenda. Caeterum gryphus in libro G descriptus, fere non ab eo, qui h. l. occurrit, discrepat, si rationem habeamus erroris calami quem Hugenus ipse commisit et Leibnitio corrigendum mandavit in ep. 18^a Nov. 1690, (Fasc. I. p. 39) sc. pro $\frac{2}{3} ec$ scribendum esse $\frac{1}{3} ec$.

Gryphus itaque emendatus sic se habebit. : $\frac{r^2}{a} = c$; $\frac{cs}{a} = c$; $\frac{1}{2} rc + \frac{1}{2} ec = S. c. c. p. c.$; $\odot \sqrt{2ur} = s. c.$; 45, $r = c$; 10000, 88137, 41421 prox.; $xyy = a^2 - ayy$; $xyy = aaxx - ayy$; $d. h. c. q. c. p. q. i. p. c. t. i. i. p. c. r. c. i. i. i. a.$

Litterae jam in 5 prioribus aequationibus haec significant: (fig. 18)
 $r = CA$. radius curvaturae in Catenariae vertice.

$a = KL$. ordinatim applicata puncti catenariae.

$c = KA$. curvae longitudo inter punctum quoddam K et verticem A.

$s = LS$. pars axes intercepta inter applicatam KL et tangentem KS puncti K.

$e = AW = CB$. si nempe ponatur $AI = AK = IW$ parall. KS.

$u = AS$.

$S. c. c. p. c.$; sector, cui evoluta pro centro.

$\odot \sqrt{2ur} = s. c.$; circulus a radio $\sqrt{2ur}$ = superficiei conoidis ex conversione AK.

45, $r = c$. Si angulus LKS est 45°, erit CA = curvae AK.

Duae aequationes $x^4 y^2 = a^4 - a^2 y^2$ et $x^2 y^2 = a^2 x^2 - a^2 y^2$, expriment curvarum totidem naturas.

Denique litterae quae has aequationes proxime sequuntur, hoc sibi volunt:

Data harum curvarum quadratura, catenae puncta quotlibet inveniri possunt, et tangentes in his punctis, et rectas curvis inter illa interjectis aequales.

Quibus omnibus. denique ut majorem etiam lucem affunderemus, sequentia ipsius Hugonii verba subjungemus :

» Si a puncto curvae fuerit ordinatum ad axem applicata itemque tangens, cum axe concurrens, erit applicata ordinatum ad partem axis inter ipsam et tangentem, sicut radius curvaturae, quae est in vertice, ad curvae portionem inter verticem et punctum contactus.

Hinc radius ille curvaturae in vertice aequalis est curvae portioni inter verticem et punctum inclinationis catenae ad horizontem in angulo semirecto.

Lisdem positis, superficies conoidis a curvae portione inter contactum et verticem effecta, aequalis est circulo, cujus radius proportionem medius inter verticem et concursum tangentis.

Hinc apparet superficies hujusmodi conoidum esse inter se sicut interceptas inter verticem et tangentem in puncto curvae extremo.

Dato radio curvaturae in vertice et tangentibus, possum et curvam, cujus evolutione Catenaria describitur, rectae exaequare. Itemque sectorem, cui pro centre est portio curvae evolutae, spatium rectilineo.

Catenae puncta quotlibet invenire possum, et tangentes in iis punctis, et rectas curvis inter illa interjectis aequales, si ponatur dimensio duorum quorundam spatiorum, curva geometrica et rectis terminatorum. Hinc inveni, si a puncto inclinationis anguli semi-recti ducatur axi perpendicularis, eam esse ad abscissam ad verticem, proxime ut 8809 ad 4134, et curvam interceptam tunc esse partium 10000.»

Superest ut de iis videamus quae Causticarum inventionem spectant; qua in re melius me facere non posse mihi videor, quam si brevem Hugonii annotationem, huc pertinentem, et in MSS. fasc. 13^o. servatam, hic praemittam, quippe quae sponte ulteriori

disquisitioni nobis ansam praebebit. Est haec nota 7^o. Aprilis 1691 conscripta et hujus indolis:

» Ad pag. 364 a^l. 1682 Act. Eruditorum Lipsiensium.

Cum Parisiis ad me venisset D. T. sive Tschirnhaus, ut puto A^o. 1678, ostendi ipsi obiter figuras, quae libro meo de Luce continentur, ubi in fine est haec prior tab. 19. Inde est quod in eandem hanc contemplationem mecum incidit, quod vel hinc patet, quod hanc ipsam EHB, cum haec scriberet, nondum cognoverat. Falsam enim constructionem hic exhibet, quippe quae cum vera a me tradita non convenit, ut calculo examinavi in casu uno, cum nempe BF, FC aequales ponuntur. Vid pag. 93, lib. G. Atque hinc colligo neque methodum generalem, quam hic jactat, ipsi cognitam fuisse, cum in exemplum ejus hanc erroneam curvae descriptionem adferat. Neque video qua ratione, nisi circini experimento; quo quid in Geometria turpius? Sed hic noster eodem modo prorsus in tangentibus curvarum filarum, post aliquot annos, in errorem incidit. Atque ita levi verisimilitudine adductus non veretur magnifice asseverare quorum nullam demonstrationem habet, quaeque instituto examine falsa esse deprehenduntur.

Caeterum cum initio anni 1690 diatribam meam de Luce edidissem, ille continuo exemplar ejus nactus, (sive id ipsum quod ad scriptores Actorum Lipsiensium miseram commendatum D^o. Vegelino, sive etiam a typographis folia ante editionem acceperit) animadversa veriori descriptione curvae hujus, eam quasi a se profectam mensis Februarii Actis inseri curavit, cum aliis ad hujusmodi curvas spectantibus; meae vero diatribae mentionem in iisdem Actis fieri impediit, ut puto, usque in mensem Octobrem ejusdem anni 1690, cum tamen initio Januarii in lucem prodiiisset; quo nempe longius plagii suspicionem removeret.

Ait vero Bernoulium nuper invenisse hanc curvam ad sex dimensiones

siones ascendere, quam ipse olim calculo collegerit esse tantum dimensionum quatuor, in quo se falsum fatetur, erroremque suum nunc emendat; utque novo invento eum compenset, facillimam ejus lineae constructionem adferre se ait, quae est illa ex libro meo, neque tamen de errore suo lectorem admonet. Vellem autem scire quis ille olim fuerit calculus, quo quatuor dimensiones istas reperit; credo falsam illam curvam A°. 1682 editam ad calculum revocavit, cum pro vera ipsam posuisset.

Porro et mense Aprili anni 1690, in Actis Lipsiensibus, rursus de curva hac egit, ostenditque epicycloidem esse, quod procul dubio quoque ex mea diatriba hausit, postquam nempe vidit priorem dolum non caruisse successu. Unde porro ex Newtoni opere planum erat hanc curvam similis curvae (non autem suimetipsius) evolutione describi, quod ante multos annos Parisiis demonstravi universali ratione; eaque demonstratio coram Academiae sociis lecta fuit et in collectiones relata die.....

Primus autem, qui de Epicycloide ostenderit geometricas curvas esse, et spatia earum mensurari posse, fuit Presbyter quidam Normannus, nomine de Vaumecle, cujus ea de re literas aliquot ad me datas adservo.

Si, antequam meus liber de Luce prodiret, errorem suum in curva describenda cognovisset D. T., jam ante quoque ipsum correxisset, nec totis 8 annis omnium reprehensioni expositum reliquisset. An Bernoulius fortasse eum animadvertit? Sed nihil invenio in Actis Lipsiensibus, quo id appareat.

Asseverare ausim D. T. nullam hactenus demonstrationem habere legitimam descriptionis curvarum de qua pag. 71 A°. 1690.

Ex hac satis ampla annotatione discimus verosimilliter Tschirnhusio nonnulla, at imperfecta, de Hugonii invento circa Causaticas innotuisse, eaque ipsi causam fuisse erroris quem commisit,

cum prima vice in Actis Lips. Aⁱ. 1682 dictas curvae constructionem publicaret. Sed ne diutius in verosimilibus versemur, age! proferamus ea testimonia, quae, quamvis Tschirnhusium plagii non convincant, abunde tamen probent Hugenum multis annis ante epicycloidum proprietates nonnullas cognitās habuisse et perspectas. Hunc in finem hujus demonstrationem de Epicycloidum mensura, quam cum Academiae Parisiensis Sociis communicavit et in nota supra citata commemorat, hic exhibebo, qualem eam, partim gallice partim latine conscriptam, inveni tum in Adversar. Libro E pag. 165, tum in schedis in MSS. fasciculo II reperiundā.

26 Nov. 1678; lu' à l'assemblée le 3 Dec. 1678. (¹)

La mesure des lignes epicycloïdes.

Prop. 1^o. Par l'évolution de la moitié d'une epicycloïde en commençant par son sommet, il s'engendre la moitié d'une autre epicycloïde semblable à la première.

Soit (fig. 19) BEK la moitié d'une epicycloïde décrite par le roulement du cercle BC sur le cercle immobile BL. Et le cercle KM étant supposé estre au cercle KC, comme le cercle CB au cercle BL, soit par le roulement du cercle KM sur le cercle KC immobile décrit la $\frac{1}{2}$ epicycloïde KFN, qui sera terminée à la droite AB prolongée, et sera semblable à la $\frac{1}{2}$ epicycloïde BEK; à cause de la proportionalité susdite des cercles. Je dis que la même courbe KFN sera décrite par l'évolution de la courbe BEK, commencée par K.

(¹) Du Hamelius hoc aliquatenus confirmavit, nam in Regiae Scient. Acad. Histor. p. 179. ed. 2 legimus sequentia: Eodem anno (1678) D. Hugen dissertationem de refractionibus variis in congressionibus legit, quam postea in tractatu de Lumine publicè jure fecit.

Sumto in $\frac{1}{2}$ cycloïde BEK quovis puncto E, ponatur circulus genitor, cum punctum describens esset in E, habere positum GED, tangens circulum BL in D, junctaque ED, sit ei perpend. EG, quae quidem tanget $\frac{1}{2}$ cycloïdem in E, secabit autem circumferentiam KC in puncto contactus circuli DE, cum DEG sit semicirculus, propter angulum rectum DEG. Il faut donc seulement démontrer que EG étant prolongée rencontre la $\frac{1}{2}$ cycloïde KFN à angles droits, car il s'en suit de là, que cette $\frac{1}{2}$ cycloïde se décrit par l'évolution de la $\frac{1}{2}$ cycloïde KEB, par la propos. de Evolutione Curvarum.

Soit VG le cercle geniteur de la $\frac{1}{2}$ cycloïde KFN, et qu'il touche le cercle KC en G, et que EG prolongée coupe la circonférence GV en H.

Puisque donc l'arc BDL est égal à la demi-circonférence DEG, et que l'arc DB est égal à l'arc DE, par la nature de la cycloïde, l'arc DL sera aussi égal à l'arc EG. Mais l'arc EG est à l'arc GH, comme le diamètre DG à GV; c'est-à-dire comme AD à AG; ou comme l'arc DL à l'arc GK. Donc les arcs EG, DL étant égaux, les arcs GH, GK seront égaux de même. Donc le point H est le point traçant de la cycloïde KF, lorsque son cercle generateur est en GV. Et par conséquent la droite GH, qui est la continuation de EG, rencontre la cycloïde au même point H à angles droits, par notre démonstration générale.

Propos. 2^e. La courbe d'une épicycloïde est au diamètre de son cercle generateur comme deux fois la somme des diamètres du cercle generateur et du cercle immobile, qui sert de base, au rayon du même cercle immobile.

Il est évident que l'évolution de la demi épicycloïde BEK se terminant en N, la droite BN est égale à la courbe BEK. Et parce que, comme AB ou AO à AC ainsi est BC à CN; ainsi sera AO à OC, comme CB à BN, c'est-à-dire CB à la courbe BEK, et partant le double de cette courbe, ou l'épicycloïde entière BKP, au

diametre du cercle gener. BC , comme deux fois OC à AO . Ce qu'il falloit dem.

Il est à noter que ces epicycloïdes sont des lignes geometriques, quand les diametres des cercles generateur et immobile sont commensurables.

Prop. 3^a. Spatium epicycloïde et basi sua comprehensum est ad circumulum genitorem epicycloïdis, ut tripla semidiameter circuli baseos cum diametro circuli genitoris ad radium circuli baseos.

Dans la mesme figure (fig. 19) soit pris un autre point Q dans l'epicycloïde BQK , pres du point E , et soit QP sa tangente, qui rencontrera donc l'epicycloïde KHN à angles droits, comme en P , et coupera necessairement la circonference CK ; prenons que ce soit en R . Or, les points de contact E, Q , peuvent estre infiniment pres l'un de l'autre, et aussi les points d'intersection G, R , la raison de HE à GE et de PQ à QR demeurant toujours les memes que de VD à DG . Partant HQP, GQR , peuvent estre considerees comme des triangles, desquels la proportion est la mesme que du qu. HE au qu. EG , ou du qu. VD au qu. DG . Donc tout l'espace $BEKN$ à l'espace $BEKC$ aura la raison du qu. VD au qu. DG , parce qu'en concevant des tangentes infinies, le long de la courbe BQK , elles diviseront tout l'espace $KPNBQK$ en une infinité de triangles, tels que PQH , qui auront chacun à leur partie RQG la mesme raison que le qu. HE au qu. EG , ou que le qu. VD au qu. DG . Donc aussi, dividendo, l'espace $KHNC$ sera à $BEKC$ comme l'exces du qu. VD sur le qu. DG est au qu. DG ; mais l'espace $BEKL$ est à $KHNC$ comme le qu. DG au qu. GV , donc, ex aequo in proportione perturbata, l'espace $BEKL$ sera à $BEKC$, comme le qu. $VD \div$ qu. DG au qu. GV , c'est-à-dire comme le rectangle de $VG + 2GD$ et VG au qu. VG , ou comme $VG + 2DG$ à VG . Et l'espace $BEKL$ à $BLKC$ comme

$VG + 2DG$ à $2VG + 2DG$, ou comme $AK + 2AL$ à $2AK + 2AL$. Sed $BLKC$ est ad semicirc. BRC , comme $2BL + 2CK$ à BL , parce que $BLCK$ est égal au $\square \frac{1}{2}BL + \frac{1}{2}CK$ et BC . Et le demicercle BRC égal au $\square \frac{1}{2}BL$ et BC . Et partant en ostant la commune hauteur BC et quadruplant, sera $BLKC$ au demicercle BRC ; comme $2BL + 2CK$ à BL , ou comme $2AK + 2AL$ à AL . Mais l'espace $BEKL$ estoit à $BLKC$ comme $AK + 2AL$ à $2AK + 2AL$. Donc, ex aequo, $BEKL$ au demicercle BRC comme $AK + 2AL$ à AL , c'est-à-dire, comme $3AL + LK$ à AL .

Pagina autem praecedens, sc. 164, ejusdem libri G haec continet:

» Omnis epicyclicae evolutione similis epicyclica describitur.

Ut radius circuli, super quo revolutio, ad diametrum circuli revoluti, ita utriusque summa ad aliam; haec juncta diametro circuli revoluti efficiet dimidiam longitudinem epicyclicae ex revolutione descriptae.

Vel: curva epicyclicae est ad diametrum circuli genitoris, ut dupla diameter circuli manentis cum dupla diametro revoluti ad semidiametrum manentis.

(Fig. 20) $DA = AG$. Arcus $BC = BA$. Punctum C in cycloide. DBE linea recta. ECH recta. EL parall. GD . Dico EL esse $= EH$ et $EC = \frac{1}{2}EH$. Ducatur BC et DK perp. EH . $\angle ECB$ est rectus. Ergo ut DE ad EB ita KE ad EC . Ergo $EC = \frac{1}{2}EK$ sive $= \frac{1}{2}EH$. Ducatur FC . Quia jam radius $FB = \frac{1}{2}$ rad. AD , et arcus $BC = BA$, erit ang. BFC dupl. BDA . Ergo $\angle BEC = BDA = DEL$; ergo $EH = EL$.

Hinc video $MNCA$ curvam, quae terminat spatium radiorum in speculo cavo MGH , a radiis axi DG parallelis, esse cycloidem a circulo EB super duplo majoris diametri circulo AB revoluta.

Non credo aut plura aut graviora requiri argumenta, quibus probemus Hugenum A^o. 1678, adeoque diu ante quam Tschirnhusius Kata-causticae falsam constructionem ediderat, non tantum veram

hujus curvae naturam cognovisse, sed etiam ejusdem proprietates quasdam geometricas cum aliis communicasse. Dubium itaque non amplius est, quis Causticarum auctor et inventor habendus sit, et in posterum certe, in hac Disciplinarum Historiae parte, Tschirnhusii locum occupabit Hugenus.

Ex hac, quam enarravimus, controversia, satis apparet Hugenum (nec injuria) aegre tulisse, quod inventionem, quae ipsius esset, alius sibi arrogaret. Plura ejusdem animi similibus de causis indignabundi exempla afferre possemus: saepius enim accidit ut, quae Hugenus studio et labore subtiliter excogitaverat, eorum laudem et fructus alii in se convertere conarentur; sed malumus hac ipsa opportunitate eam viri clarissimi virtutem commemorare, quae, quod sibi poscebat, id ipse omnium primus aliis concedere soleret. Etenim ad Notam istam, quam supra p. 40 exhibuimus, si retrovertamur, fieri nequit quin admiremur Hugenum ingenue fatentem, non se esse, sed Vaumeslium, qui primus Epicycloides curvas geometricas esse, earumque spatia mensurari posse, ostenderit. Quin ipse Hugenus sua manu in margine demonstrationis supra citatae de longitudine epicycloidis sequentia annotavit: » Mr. de Vaumesle, Religieux en Normandie, m'ayant mandé qu'il avoit trouvé la mesure de la ligne epicycloide, lorsque le cercle generateur et le cercle immobile sont égaux, cela m'a donné occasion de chercher cette demonstration generale. »

Vaumeslius geometra est, quantum scio, in Disciplinarum Historia ignotus, quem tamen ex ea diutius exulare, teste Hugenio, nefas foret. Ut igitur et haec vire eximio honos debitus in posterum concedatur, juvat ejus ad Hugenum epistolas hic proferre, in quibus de mathematicis suis disquisitionibus disseruit. ⁽¹⁾

(¹) Servantur haec epistolae in MSS. fasc. 12^o.

Vaumeslii ad Chr. Hugenum epistolae.

1. Mr. Il y a desia longtemps que je souhaite avoir l'honneur de vous écrire, pour vous consulter sur quelques matieres geometriques, sachant que vous estes un des plus habilles hommes du monde dans cette science, et un des plus honnestes et obligans qu'on puisse voir; ce qui a fait que je né point douté que vous n'ussiez la bonté de mescouter, et de me dire sincerement votre sentiment sur ce que je vous demanderois, suivant lequel je suis persuadé ne pouvoir manquer. Car en effect, Monsieur, rien n'est plus vray que ce que vous avez dit à Mr. Hue, qui a pris la peine de vous aller voir pour moy, que ceux, qui estudient aux mathematiques en des lieux retirez, se persuadent souvent avoir trouvé de belles choses, qui ne se trouvent que tres communes, quand elles sont produites devant les scavans, et c'est assurément une des principales raisons, qui m'oblige de vous importuner, pour vous demander votre advis sur lequel je me croiray très assuré. Je ne vous envoie neanmoins encor rien des choses desquelles j'ay a vous consulter. Je vous les exposeray seulement en attendant que je les mette au net pour vous les envoyer, si vous me dites qu'elles en vallent la peine. Mon dessein, Monsieur, est de donner des moyens fort aisez de resoudre les plus difficiles problemes, qui puissent estre resolus par la geometrie ordinaire, car quoyque Mr. Descartes, (et peut estre encor d'autres que je né pas veus) ait, ce semble, fait sur ce sujet tout ce qui se peut faire, je croy neanmoins y pouvoir adjouter quelque petite chose. Vous allez voir si j'ay raison. Je suppose qu'on a examiné un probleme, et qu'on n'a pu trouver que des equations quarré-quarrées, lesquelles on n'a pu reduire, ny y trouver de diviseur, en sorte qu'on juge le probleme solide et impossible, et qu'on a reduit l'equation trouvée à ces termes $x^4 + lx^3 + lx^2 + lnx - lnpq$

égal à 0, on peut supposer les signes + et — de telle autre maniere qu'on voudra, pourveu que le mesme signe ne soit pas partout, car cela ne peut estre. Il est certain, Monsieur, que quoyque cette equation simplement ainsi proposée soit naturellement impossible, qu'elle deviendra neanmoins possible, si les trois plans pq , $\frac{1}{2}ll - ln$ et $\frac{8n^2p}{7} + 3ln - 12n^2$ sont proportionnaux; et je croy que si on pouvoit trouver la valeur d' x par la methode de Mr. Descartes, en ne se servant que de cercles et lignes droittes, qu'on la trouveroit aussy bien, les trois susdits plans n'estant point proportionnaux que quand ils le sont. Car je ne voy point que cette condition là donne aucun avantage pour la trouver, et quand bien mesme cela se pourroit faire, ce que j'ay peine à croire, ce ne seroit assurément qu'avec grande peine par ainsy. Je croiray encor avoir fait quelque chose si j'apprends à le faire aisement. On me pourra dire que cela n'est pas d'une grande utilité en geometrie, à cause que tous les problemes, auxquels il sera necessaire d'appliquer cette nouvelle methode, doivent tous passer pour impossibles, puisqu'ils le sont en effect en une infinité de manieres, et qu'ils ne sont possibles qu'en une seule, et que c'est tout de mesme que si on avoit l'equation $x^3 - b^2c$ égal à 0, et qu'il fallust trouver la valeur d' x , b et c estant données; ce qui est impossible par la géometrie, dont je parle, à moins que les quantitez b et c ne soient supposées avoir mesme raison l'une à l'autre qu'un nombre cube à un autre nombre cube. Je conviens de cela, mais on m'accordera aussy qu'il n'est pas tout a fait inutile de scavoir les cas auxquels les problemes, qui sont de leur nature impossibles, deviennent possibles, car à moins de les scavoir, on ne pourra resoudre ces problemes-là, quoyqu'on les propose en la maniere qu'ils sont possibles, ce qui seroit une ignorance; et de plus la possibilité ou impossibilité de l'equation $x^3 - b^2c$

égal

egal à 0, est toute visible, et celle des equations, que je propose, est cachée et difficile à connoistre. Voilà pour le premier.

Il y a 3 ou 4 ans que je m'appliqué quelque temps à considerer cette ligne courbe tant à la mode, appelée cycloïde, ainsy qu'une autre, presque de mesme nature, quoyque geometrique, que j'appelle cycloïde circulaire, parce qu'elle est decrite par un point de la circonference d'un cercle, qui roule sur un autre cercle egal au premier. J'ay trouvé la tangente de la cycloïde circulaire par la methode de M. Descartes, et j'ay reconnu que les tangentes de l'une et de l'autre cycloïde se trouvent de mesme maniere; que la circulaire est double de l'autre, les cercles geniteurs estant egaux. J'ay aussy trouvé la mesure de ces deux lignes courbes. Je ne scay si ma demonstration convient avec aucune de celles des auteurs, qui ont trouvé la mesme chose auparavant moy, dont vous parlez dans votre *Horologium Oscillatorium*, car je n'en ay vu aucune que la votre. J'ay aussy trouvé par hasard, en considerant la cycloïde circulaire, la quadrature du cercle par l'attouchement de la spirale, d'une autre maniere qu'Archimede; que par l'evolution de la cycloïde circulaire est decrite une autre cycloïde circulaire, triple de la premiere, et cecy n'est pas difficile. J'ay encor quelqu'autres petites choses de moindre consequence que celles-cy. Je vous enverray le tout, quand je l'auray mis au net, ou une partie, selon que vous le voudrez et que vous l'en jugerez digne. Je vous prie, Monsieur, d'excuser la liberté que je prends auprès de vous, et de croire que je suis avec tout le respect possible; etc.

A Hambye ce 29 Octobre 1678.

De Vaumesle,
relig. à Hambye.

Si vous me faites la grace de m'escire, vous m'adresserez vos lettres ainsy: pour Basse Normandie à M. de V. etc., par la poste de Coutances à Gauray.

2. Mr. J'ay receu la lettre, que vous avez pris la peine de m'crire. Je vous en suis bien obligé. Je vous diray, Mr., en vous y respondant, que, puisque j'apprens par la vostre qu'on n'a pas encore trouvé les moyens de resoudre tous les problemes de geometrie et de connoistre quand ils sont plans ou non, puisque vous y avez aussy pensé, je fais dessein de rendre ma methode generale, si je le puis, et si je ne le puis, je vous enverray si peu que j'ay. Ma methode n'a pour fondement que la solution d'un probleme que j'ay trouvé très difficile, et que j'ay eu bien de la peine à resoudre. Il est tel: (fig. 21) $acde$ est un rhombe. Il faut du point e mener la ligne efb en sorte que l'intersegment fb soit egal à la ligne donnée g . La solution de ce probleme est rapportée par Herigone, vers la fin du premier tome de son cours, laquelle solution a esté trouvée par Marinus Gelaldus, par la methode ancienne, laquelle ne m'a de rien servi pour la trouver par la nouvelle. Si vous prenez la peine de le construire, je croy que vous conviendrez qu'il est difficile.

Pour ce qui est de l'espace et de la courbe de la cycloide circulaire, la demonstration en est très facile de cette maniere.

Si l'on fait rouler quelque poligone que soit sur une ligne droite, cette cycloide imparfaite sera composée d'autant de secteurs au moins, que le poligone regulier a de costez, et ces secteurs-là sont tousjours egaux à deux fois le cercle, auquel le poligone est inscript, et l'espace de cette mesme cycloide imparfaite contient, outre ces secteurs, plusieurs triangles, qui tous ensemble sont tousjours egaux au poligone; d'ou il est aisé d'inferer que l'espace de la cycloide egal à trois fois le cercle generateur. Je croy que vous scavez mieux que moy ce que je viens de dire; mais si l'on fait rouler un poligone sur un autre poligone egal et semblable au premier, cette autre cycloide imparfaite sera composée d'autant de secteurs que la premiere, mais

ces secteurs icy sont doubles de ceux de la precedente, et, outre ces secteurs, son espace contient les memes triangles que la precedente, d'où il ensuit que la courbe de celle-cy est double de la precedente, et que son espace est quintuple du cercle generateur. Il ne faut que faire une figure pour voir la verité de ce que je dis. C'est pourquoy je vous disois dans ma premiere lettre que cela estoit très aisé.

Je n'ay point entendu parler de cette belle invention de M. Römer, dont vous me parlez. (¹) Je suis dans un pays dans lequel il n'y a personne de curieux en cette science. Je né point d'autre commerce que le vostre, qui ne fait que maistre, et j'ay peu de livres: ce que j'en ay, sont le Cours d'Herigone, les Oeuvres de Mr. Viète, la Geometrie de M. Descartes, commentée par Schooten, et vostre Horologium Oscillatorium. Voilà tout ce que j'ay, mais si vous avez la bonté de dire à M. Hue qui sont les meilleurs livres de cette science, je le priay de m'en envoyer quelques uns.

Je vous enveyray, le plustost que je pourray, tout ce dont je vous ay parlé dans ma premiere lettre, hormis les moyens de résoudre les plus difficiles problemes de geometrie, que je tascheray de perfectionner, si je puis. Si je tarde un peu, vous en excuserez si vous plaist, parce que ma profession ne me permet pas d'y travailler autant que je voudrois. Je vous supplie de croire que je suis avec bien du respect, etc.

A Hambye, ce 19 Novembre 1678.

De Vaumesle

R. S.

(¹) Significat procul dubio epicycloidum usum in mechanica, quem non a La Hire sed a Römero profectum esse docet Leibnitiuss, in Leibn. et Bern. Comm. Phil. T. I. p. 347. Hugenus etiam in Libro suo Adv. F. passim Römeri rotas vocat eas, quarum dentes epicycloidis formam referunt.

3. Mr. Je vous envoie enfin les demonstrations geometriques, dont je vous parlé, il y a huit ou neuf mois, dans la lettre que j'eus l'honneur de vous écrire en ce temps-là. Elles ne sont pas autant correctes qu'elles devroient estre pour paroistre à Paris, mais la honte que j'avois d'estre si longtemps à vous envoyer si peu de chose, a fait que je n'e pu me résoudre à tarder d'avantage à vous les envoyer, me reservant néanmoins (si elles ont le bonheur d'avoir votre approbation et celle des autres MM. de l'Academie, qui les pourront voir, si vous les en jugez dignes,) de les mettre en meilleur estat et selon les défauts que vous y remarquerez. Car quoy-qu'elles fussent au point que je n'y pusse remarquer aucune faute, je croy que vous y en trouveriez encor. C'est pourquoy j'ay mieux aimé vous les envoyer en l'estat qu'elles sont, qui est tel que vous les entendrez assez bien pour en juger et m'en dire votre sentiment, que d'attendre d'avantage à vous les envoyer, plus correctes à la verité, mais où il y auroit encor eu à corriger une seconde fois.

J'ay mis les figures apart pour la commodité de ceux qui liront ces demonstrations, car quand la figure d'une proposition est sur la page d'un feuillet et la demonstration sur l'autre, c'est une incommodité d'estre obligé de tourner le feuillet bien des fois.

Puisqu'il me reste encor du papier, vous ne serez pas fâché que je vous entretienne encor un peu, et que je vous dise quelque chose de notre cycloide circulaire, en laquelle je trouve certaines proprietés, qui peuvent ce semble contribuer à la mesure du cercle; car c'a esté la consideration de cette ligne courbe, qui m'a fait trouver, sans que j'y pensasse, la quadrature du cercle par l'attouchement de la spirale, que vous voyez à la fin des autres. Ce je veux vous dire à present est que, si il y a une suite de polygones inscrits en un mesme cercle, comme il est dit au commencement de la premiere proposition des demonstrations que je vous envoie, et que ces po-

lygones ayant beaucoup de costez, par exemple le premier a 90 costez, le second 180, le 3^e. 360 etc.; je dis que la difference du cercle et du polygone de 180 costez, n'est guere que le tiers de la difference des polygones de 180 et 90 costez. Tout de mesme, que la difference du cercle et du polygone de 360 costez n'est guere que le tiers de la difference des polygones de 360 et 180 costez, et ainsy de tous les autres. Ce que je prouve ainsy. Le cercle (fig. 22) $abgc$ est la base ou cercle immobile d'une cycloide circulaire, dont le point c est le commencement; $bbfd$ est le cercle mobile. Ces deux cercles se touchent au point l , les arcs bgc et bfd sont tous deux de 60 degrez, $cle d$ est l'arc de la cycloide decrit par la revolution de l'arc bfd sur $cg b$. L'espace compris de la ligne droite bd , des arcs $d e l o$ et $c g b$, est quintuple de l'un des segments de cercle bgc ou bfd . Si à cet espace on ajoute le segment $c g b$, l'espace $b d e l c$ est sextuple du segment $c g b$. Cet espace donc avec l'exagone inscrit au cercle $abgc$ est egal à ce mesme cercle.

Si on ne prend à present que le petit arc cl de la mesme cycloide, qui est decrit par la revolution de l'arc fd , sur l'arc cg , qui sont les moittiez des arcs bgc et bfd ; par la mesme demonstration que dessus, l'espace gcl est sextuple du petit segment du cercle cmg . Le double de l'espace gcl est donc egal à 12 fois le segment cmg . Le double de cet espace avec le dodecagone inscrit au cercle $abgc$ est donc egal à ce mesme cercle. Mais parce que les triangles gcl et cgb sont egaux, le double du triangle gcl est le tiers de 6 fois le triangle cgl , et 6 fois le triangle cgb est la difference du dodecagone et de l'exagone inscrit au cercle $abgc$. Donc deux fois le triangle gcl est egal au tiers de la difference des dodecagone et exagone susdits, et le double de ce triangle gcl est presque egal à la difference du cercle $abgc$ et du dodecagone inscrit en icelui; car il ne s'en faut que deux fois le petit segment cl de

la cycloïde, et ces petits segments diminuant toujours, il est evident que, quand les polygones auront beaucoup de costez, que la difference du cercle et du polygone n'est guere que le tiers de la difference de ce polygone et de l'autre polygone, inscrit au mesme cercle, et qui n'a que la moitié des costez du premier.

Il me reste encor assez de papier pour vous dire encor comment on peut inferer d'une des demonstrations, que je vous envoie, ce que vous avez trouvé le premier, dont je ne pas vu la demonstration; qui est, que la portion de l'espace de la cycloïde ordinaire, retranchée par une ligne parallele à la base, qui passe par le point de l'axe éloigné du sommet du quart de l'axe, est egal au triangle equilat., ou à la moitié de l'exagone inscrit au cercle generateur. (fig. 23) ab est une ligne droite, divisée en deux parties egales au point d , egale à la circonference du cercle, dont le diametre est dc perpendiculaire à ab . Les lignes ae , ef , ei , fb sont egales; les cercles egaux $negh$ et $pfrg$ touchent la ligne ab en des points e et f , et leurs diametres sont egaux à dc . Les arcs egh et frg sont chaqu'un le tiers de toute la circonference. Les points h et g sont donc deux points de la cycloïde ordinaire. Il est certain que le rectangle $emlf$ est egal au cercle generateur; que le triangle ehl est la moitié du triangle equilateral inscrit au cercle. Le trapese $ehgf$ est donc egal au cercle generateur et au triangle equilateral inscrit en iceluy, et que, suivant ce que j'ay demonsté que l'espace compris des lignes droites eh et ea et de l'arc de la cycloïde ah est egal à trois fois le segment de cercle egh , qui adjoutez au triangle equilateral sont egaux au cercle generateur; cet espace donc adjouté au trapese $ehgf$ est egal à deux fois le cercle generateur. Et puisque l'espace entier, compris de toute la cycloïde, et de sa base est egal à trois fois le cercle generateur, les deux espaces restans, dont un est celuy qui est com-

pris de la lignes ab et de l'arc de la cycloïde acg , et l'autre est compris des lignes fb et fg et de l'arc gb de la cycloïde, sont donc tous deux ensemble égaux au cercle generateur. Mais l'espace compris des lignes droites fb et fg et de l'arc gb de la cycloïde est égal à trois fois le segment frg , donc l'autre espace est égal au triangle équilatéral inscrit au cercle generateur, puisque trois fois le segment frg et le triangle équilatéral sont égaux au cercle.

Je suis, Monsieur, et vous prie d'excuser de cette trop longue lettre, de m'honorer d'un petit mot de réponse, et de croire que je suis avec bien du respect, etc.

A Hambye, ce 31 Juillet 1679.

De Vaumesle.

Hæc sunt, quas reperimus, Vausmeslii ad Hugenum epistolæ, cujus vero ad eandem responsa inter MSS. frustra quaesivimus. Desideramus etiam Vaumeslii demonstrationes, quarum in epistola sua ultima mentionem fecit. Sed ubi graviora desunt, levioribus nos contentos esse decet. Neque vero ea, quæ Vaumeslii epistolæ continent, doctrinæ specimina, parvi æstimanda sunt. Quin, ut cætera taceamus, si Maupertuisio ingenii laudem tribuimus, qui A°. 1727, ex polygonum revolventium proprietatibus epicycloïdum mensuram effecit ⁽¹⁾, quanto major honos Vausmelio erit concedendus, qui jam 50 fere annis ante, omnibus pene subsidiis destitutus et in ignoto orbis terrarum angulo degens, eadem argumentandi ratione ad easdem veritates pervenerat.

(1) Cf. Mém. de l'Acad. de Par. 1727.

§ VI.

Ad pag. 41 verba: *J'eus quelque part à la regle de Mr. Fatio, etc.*

Quaenam Hugonii partes fuerint in componenda regula, quam ad tangentes ducendos invenerat Fatio de Duilliers, patebit ex annotatione sequenti, quam Hugonius Libr. Adv. F. p. 271 inscripsit.

» 1687. 13^o ou 14^o Martii, M. de Duilliers me communiqua sa methode des tangentes pour les lignes courbes de M. de Tschirnhaus, par laquelle il paroissoit que ce dernier s'estoit trompé dans une chose, où il se vante d'avoir merveilleusement reussi.

Le lendemain je lui montray ma demonstration exacte de sa methode, et remarquay qu'on pouvoit proceder de l'une ligne à l'autre une à une.

Dimanche le 16 je trouvay que la perpendiculaire à la tangente devoit passer par le centre de gravité de tous les fils, qui servent à la description de la courbe, en prenant sur elles des portions égales depuis le point donné, et le demontray dans les cas de deux et de trois fils.

Lundi 17 je dis cela à M. de Duilliers, qui voulut le nier d'abord, ayant pourtant esté fort près de trouver la mesme chose, mais l'ayant ensuite rejetée, et ayant escrit à costé de son raisonnement: *cecy est fort douteux, et ainsi ma belle methode ou theorie court grand risque d'estre fausse.* Cependant, ce qu'il avoit trouvé de la somme egale des sinus, servoit à demontrer facilement le theoreme susdit du centre de gravité, et estoit fort beau.

Il avoit trouvé le centre de gravité de tous les points N, (fig. 24) puis il considera que la somme des perpendiculaires tirées d'un point de
la

la ligne AB , si elle estoit perpendiculaire à la tangente, devoit estre egale d'un et d'autre costé de cette ligne. Ensuite il crût que, ces distances, depuis les centres de gravité des fils au point B , estant egales d'un costé et d'autre, cela ne convenoit pas au centre de gravité. Mais s'il avoit mené des points D des sinus sur AB , il auroit vu qu'ils estoient chacun egaux aux perpendiculaires de B sur les lignes AN , et qu'ainsi AB estoit le vray axe de pesanteur des fils. »

Ceterum pulcra Duillierii inventio, quam in ipsa hac nota commemorat Hugenus, de sinuum summa, arcte cohaeret cum problemate de tangentibus ducendis ad curvas, quarum haec natura est, ut summa distantiarum puncti cujuslibet curvae ad duo plurave alia positione data semper sit aequalis lineae datae. Quoad hoc problema sequentia in eodem libro F. p. 230. ab Hugenio fuere litteris consignata. (Fig. 25)

» A, B, C , puncta data in linea recta vel utcunque. KDK curva ejusmodi naturae, ut, ductis ad ejus punctum quodlibet rectis AD, BD, CD , harum summa sit datae rectae aequalis. Quaeritur tangens in D .

Sit ea DE , et E punctum proximum D , idque censendum in curva existere. Ab E in rectas AD, BD, CD , si opus sit productas, cadunt perpend. EG, EH, EF .

Ergo si ex A, B, C , ducerentur rectae ad E , crescet ea, quae ex C , longitudine EF , quae ex B diminuetur longitudine DH , quae ex A diminuetur item longitudine DG . Ergo ut summa ductarum ex A, B, C ad E sit aequalis tribus ex A, B, C , ad D ductis, hoc est rectae datae, oportet DF aequari duabus DH, DG .

Sit tangenti DE perpendicularis DL , et ex D descripta circumferentia secet rectas AD, BD, CD in M, O, N , unde ducantur in DL perpendiculares MQ, OR, PN . Quod si jam pro radio

circuli sumatur DE , apparet angulorum DEF , DEH , DEG esse sinus DF , DH , DG . Istis autem angulis aequales sunt, singulis singuli, PDN , RDO , QDM , quorum sinus sunt NP , OR , MQ . Ergo sicut sinus DF aequatur duobus DH , DG , ita sinus NP aequabitur duobus OR , MQ ; unde facile colligitur punctorum M , O , N centrum gravitatis esse in recta DL . Itaque, reperto hoc centro, dabitur recta DL , quae tangenti DE est ad angulos rectos.

Eadem vero est constructio, quotcumque data fuerint puncta, [e quibus rectae sunt] ad D ducendae, quarum summa est data.

§ VII.

Ad epist. 20^{am}. pag. 69. sqq.

Abstinere non possum quin hoc loco cum lectoribus communicem ea quae in variis Libris Adversariorum inveniuntur ad praecipuas hujus epistolae partes pertinentia; Hugonii experimenta sc. de resistentia fluidorum, quae commemorantur Fasc. I. p. 70, et descripta sunt in Libro D. p. 157 et p. 194; nec non ejusdem disquisitiones de motu corporum projectorum in medio resistenti in ratione quadratorum velocitatum, quae reperiuntur in Libro G. p. 49.

De aquae resistentia exploranda et reapse variis experimentis tentata l.l. sequentia relata sunt: (¹)

13 Fevr. 1669.

» Pour determiner la force de l'eau mouvante, il faut chercher par experience premierement avec combien de force une certaine largeur d'eau, allant d'une certaine vitesse, fait impression contre une surface platte, qui luy est directement opposée. Pour cela il faut avoir un vaisseau qui contienne de l'eau de la hauteur d'un ou 2 pieds ou d'avantage, lequel on percera vers le bord du fonds d'un trou de 2 ou 3 lignes exactement mesurées, pour faire ecouler l'eau. Puis on aura une balance, dont à l'un des bras il n'y aura point de plat, mais on y appliquera dessus au bout

(¹) Experimenta haec eadem esse videntur, de quibus egit Du Hamel in Regiae Scient. Acad. Hist. p. 48. sqq. ed. 2^a. Ex iis vero quae sumus descripturi, patebit Hugonium in his experimentis concinnandis et dirigendis praecipuas egisse partes.

une petite platine ronde d'environ un pouce , qui se tiene horizontalement , et en tenant le centre de la balance fixe , et faisant que la platine se rencontre justement au dessous et tout proche du trou , qui est au fonds du vaisseau , on laissera couler l'eau et l'on mettra tant de poids dans le plat , qui est à l'autre bras de la balance , que l'effort de l'eau contre la platine en soit justement contrepesé. Et puisque la vitesse de l'eau sera connue par la hauteur qu'elle a dans le vaisseau , et que l'on sçait aussi l'ouverture du trou , on aura la mesure de la force que l'on cherche. L'on peut faire la mesme chose avec une regle de bois appuïée par dessous sur le tranchant d'un couteau.

L'on observera ensuite combien cette pression est moindre , quand il n'y a que la moitié de la premiere hauteur d'eau dans le vaisseau , et puis avec le quart.

L'on observera aussi si cette pression n'est pas egale à celle du poids du cylindre d'eau , qui a le trou pour base , à quoy il y a quelque apparence. Et cela estant , il s'en suivroit que double vitesse d'eau de mesme largeur feroit pression quadruple.

Experience faite.

Par un trou rond de 4 lignes de diam. , mesure de Paris , 2 pieds de hauteur d'eau ont pesé en s'écoulant , ou ont fait impression de $1\frac{1}{2}$ d'once.

2	pd. 11	pouc.	$2\frac{3}{8}$	onc.	
30	pouc.	$2\frac{3}{8}$	onc.	30	grains.
$22\frac{1}{2}$	pouc.	$2\frac{1}{2}$	onc.	$\frac{1}{2}$	gros.
13	pouc.	$1\frac{1}{4}$	onc.	18	grains. (¹)
2	pd. 11	pouc.	$2\frac{1}{2}$	onc.	$1\frac{1}{2}$ gros.

(¹) Ex his experimentis sequeretur universe pressionum rationem aliquantam esse minorem ratione altitudinum fluidi.

Les deux dernieres me sembloient les mieux faites. La seconde ne vaut rien , puisque la mesme hauteur de 2 pd. 11 pouc. a donné dans la derniere $2\frac{1}{2}$ onc. $1\frac{1}{2}$ gros.

(1 livre fait 16 onces , 1 once 8 gros , 1 gros 72 grains.)

Il faut surtout trouver moyen de mesurer la force de l'eau a l'egard de son effet à mouvoir, c'est à dire , combien une certaine largeur d'eau , coulant d'une certaine vitesse , peut lever de poids à certaine hauteur en un temps donné. Et parce que l'effect de la pression est egal , soit que l'eau aille contre la surface d'un corps , ou que le corps soit meu avec pareille vitesse dans l'eau immobile , l'on pourra faire les experiences requises en faisant aprester un canal de bois (fig. 26) , fait de trois ais de quelque 8 ou 10 pieds de long , que l'on remplira d'eau , et y faisant nager un morceau de bois quarré , l'on le tirera par une corde , qui , passant par la poulie A tantost fixe tantost mobile , aura un poids D attaché au bout , d'où l'on tirera les consequences desirées. Et ce mesme canal servira encore pour faire des experiences touchant la resistance de l'eau contre les corps de differente figure.

Experience faite.

Le parallelepipedé estoit attaché comme dans la figure par 4 coins ainsi (fig. 27) et alloit bien droite de cette maniere. Quand le derriere du parallelepipedé estoit arrivé en H , je commençois de conter 1 au pendule de demi secondes , et trouvay que , le poids D estant de 2 onces , je contoys environ 22 ou 23 vibrations , devant que le parallelepipedé eut achevé son cours. Et le poids D estant de 1 once , j'en contoys environ 15. Et le poids D estant de $\frac{1}{2}$ once , je contoys environ 11 vibrations. De sorte que le poids estant quadruple , la vitesse du parallelepipedé estoit double.

Que si l'on s' imagine que le parallelepipedé soit dans une eau courante , et que le poids D soit capable de le retenir en repos contre

l'effort qu'y fait l'eau , il arrivera necessairement de mesme qu'icy que la vitesse de l'eau estant double , il faudra que le poids D soit quadruple , de sorte que les impressions de l'eau contre une mesme surface sont comme les quarez des vitesses ou en raison double des vitesses.

Ayant esté trouvé bon d'examiner la mesme force de l'eau par une troisieme experience , qui sembloit la plus simple et la plus naturelle , l'on est allé en batteau sur la riviere de Seine , et ayant attaché à une corde de la mesme facon que dans la 2^e. experience un morceau de bois de chesne , formé en parallelepipedé , dont la base avoit un pied en quarré et la hauteur 2 pieds , on a arrêté le batteau dans le courant de l'eau , et puis on y a exposé la dite piece de bois , retenue par la corde , laquelle on fit passer sur une poulie ou bobine , (fig. 28) et , y ayant attaché le plat d'une balance , on le chargea de tant de poids qu'il en falloir pour contre-balancer l'effort , que faisoit le parallelepipedé , à s'en aller avec le cours de l'eau , lequel poids avec celui du plat de la balance fut trouvé la premiere fois de 27 onces.

Ensuite pour mesurer la vitesse du courant on laissa aller le parallelepipedé avec l'eau , et faisant aller en mesme temps un pendule à demi secondes , on compta 65 de ces vibrations , pendant que le parallelepipedé entraînait environ 45 pieds de corde.

On alla après cela repeter les mesmes choses dans un courant plus fort , où l'on trouva le poids qu'il falloir pour retenir le parallelepipedé contre l'eau (celui de la balance y estant compris) de 117 onces. Et ayant laissé aller le parallelepipedé avec l'eau , on ne compta que 27 demi secondes pendant qu'il entraînait les mesmes 45 pieds de corde. Il s'ensuit donc que la vitesse de l'eau du courant foible à celle du courant fort , estoit comme 27 à 65 , et que la force de l'eau contre la mesme surface platte estoit comme 27 à 117. Ce qui se rapporte aucunement avec les experiences prece-

dentes, par lesquelles on a trouvé que les forces de l'eau sont en raison double des vitesses; mais non pas tout à fait pourtant, parce qu'il faudroit pour cela que les vitesses de l'eau eussent esté à peu près comme 27 à 56, parce que la raison de 117 à 27 est double de 56 à 27. Mais il faut scavoir que l'on a rencontré une difficulté dans cette dernière expérience, à laquelle on ne s'estoit point attendu, qui empesche qu'on n'en peut pas tirer une conclusion bien juste. C'est que l'on a trouvé que l'eau de la rivière ne coule point également, mais avec de certains roulements et retours, qui font que le corps, qu'on tient arrêté contre son cours, en de certains temps ne tire presque point du tout la corde qui le retient, et un moment après élève un grand poids par son moyen, de sorte qu'on ne peut pas dire précisément combien grande est la force du courant que l'on examine par cette manière: et la mesme raison peut causer aussi de l'erreur dans la mesure de la vitesse de l'eau. Tellement qu'il faudroit, pour parvenir à plus de justesse, chercher de l'eau qui coulait également dans un canal de largeur et profondeur uniforme, ou bien tirer un corps flottant à travers l'eau de quelque canal ou estang, où elle seroit en repos, en comparant la vitesse du mouvement qu'on luy donneroit avec le poids que la corde, par laquelle on la tire, pourroit tenir élevé, comme je l'expliqueray alors plus au long. Cependant parce que dans toutes ces expériences il faut considerer outre l'impression que fait l'eau contre la surface, qui luy est directement opposée, l'empeschement qu'elle apporte en passant contre les costez du corps flottant, j'estime que la première expérience, qui pese l'impression de l'eau par la balance, quand elle sera bien affermie, est la plus assurée de toutes. »

Haec experimenta de aquae resistentia fuere instituta. Quae vero aëris resistentiam spectant, varia etiam ratione fuere comparata, ut ex sequenti narratione patebit.

Prior experiendi methodus haec erat, ut aër pondere quodam pressus e foramine datae magnitudinis exiret et impelleret contra superficiem datam, vectis brachio alteri annexam, cujus alterum brachium ita onerabatur ut aequilibrium existeret. Figura instrumenti delineata est sub numero 29. Eidem vero haec subjunxerat Hugenus :

» 22 Mai 1669. Pour observer la force du vent.

Le trou, par où l'air souffloit contre le bout de la regle R, estoit de $2\frac{5}{12}$ de ligne. Le petit poids P sans la boulette estoit de 34 grains. Le mesme avec la boulette de $1\frac{1}{2}$ gros. Bras Q R 8 pouces $1\frac{1}{2}$ lignes. Cylindre de fer blanc FF pesoit $2\frac{3}{4}$ livres. Son diametre de 8 pouces 7 lignes. Le diametre du cylindre ZZ 9 pouces 9 lignes. On le laissoit descendre 9 pouces, le trou V estant fermé, et en comptant les coups d'un pendule de demi secondes.

Le cylindre FF pressant tout seul sur l'air D, qui souffloit contre le bout de la regle R, le petit poids P sans boulette (pesant 34 grains) faisoit la distance SP de 2 pouces 11 lignes et contrebalancoit ainsi la force du souffle. Bouchant le trou V ce cylindre descendoit de 9 pouces en 35 secondes.

Estant adjouté sur le cylindre FF le poids T de 2 livres, de sorte que le tout pesoit $4\frac{1}{4}$ livres, le poids P sans boulette distoit de S de 4 pouces 8 lignes. Et bouchant après le trou V, le cylindre descendoit 9 pouces en 26''.

Adjoutant encore 2 livres à T, de sorte que le tout pesoit $6\frac{1}{4}$ livres, le mesme poids P de 34 grains estoit éloigné de S de 6 pouces 8 lignes. Et bouchant le trou V le cylindre descendoit 9 pouces en 22''.

Adjoutant encore 2 livres en T, de sorte que le tout pesoit $8\frac{1}{4}$ livres, le poids P de 34 grains estoit éloigné de S de 9 pouces $1\frac{1}{2}$ lignes. Et bouchant le trou V le cylindre descendoit de 9 pouces en 18''.

Ayant

Ayant mis au lieu du poids T un mortier qui pesoit $13\frac{1}{2}$ livres, c'est à dire avec le poids du cylindre FF $16\frac{1}{2}$ livres, le poids P avec la boulette faisant $1\frac{1}{2}$ gros estait éloigné de S de 5 pouces $5\frac{1}{2}$ lignes. Et fermant le trou V, le cylindre descendoit de 9 pouces en $13''$.

Ex his experimentis Hugenus sequentem tabulam computavit:

44 onces pressant, l'air soufflant soutenait $12\frac{1}{2}$ grains, vitesse 100.	
76 » » » » » $19\frac{1}{2}$ » » 135.	
108 » » » » » $27\frac{1}{2}$ » » 159.	
140 » » » » » $38\frac{1}{2}$ » » 194.	
260 » » » » » $72\frac{1}{11}$ » » 269.	

e qua levi negotio patebit pressiones eandem proxime sequi rationem ac vires; nec non eandem quam quadrata velocitatum. Has leges etiam ex sequenti experimentorum serie, a Hugenio tradita, efficere licet:

» Trou de 3 lignes, bras de $7\frac{1}{2}$ pouces.

44 onces pressant, l'air soufflait $21\frac{6}{16}$ grains; temps $47''$, vitesse 100.	
76 » » » » $39\frac{2}{16}$ » » $38''$ » 124.	
108 » » » » $54\frac{4}{16}$ » » $34''$ » 138.	
140 » » » » $70\frac{4}{16}$ » » $28''$ » 168.	
172 » » » » $85\frac{6}{16}$ » » $26''$ » 181.	

Uti in praecedenti experimento aër varia celeritate contra superficiem quamdam impellebatur, sic in eo, quod nunc describendum est, duae superficies diversa velocitate in aëre tranquillo movebantur, ut sic etiam ejusdem resistentia innotesceret.

» Juin 1669.

A et B (fig. 30) deux roues, qui tournoient ensemble sur un mesme axe, l'une double de l'autre, les diametres estoient d'1 et de 2 pieds.

CD un chassis quarré léger, collé avec du papier de 13 ponces par costé, se tenant perpendiculaire sur un petit traineau HK et appuyé contre un autre chassis sans papier, du costé qui regarde les roues A, B, de sorte qu'estant trainé par l'air par une ficelle, qui s'enveloppoit à l'entour de la roue A, ce chassis de papier pouvoit seulement tomber à la renverse. DFE estoit un fil de fer plié dont les bouts D et E passaient par des petits anneaux attachez au traineau, de sorte qu'il estoit mobile sur ces bouts. Il estoit incliné de 45 degrés et tenoit le chassis de papier par le fil de soie FG, attaché dans son milieu, et qui estoit horizontal, et l'on y mettoit à l'endroit F des pieces de plomb percées, pour mesurer la force de l'air, qui, à certaine vitesse du traineau, abattoit le chassis de papier. Il y avoit un pareil traineau, dont le fil, qui le tiroit, s'enveloppoit sur la roue B, et qui par consequent alloit la moitié aussi viste que le premier.

L'on chargeoit le chassis DC de 4 fois autant de poids mis en F, que le chassis de l'autre traineau, pour voir si, tous deux estant trainez ensemble, et l'un allant 2 fois si viste que l'autre, l'un chassis s'abattoit aussitost que l'autre. L'on trouva que le chassis DC s'abattoit devant l'autre; mais ayant depuis examiné à loisir les poids dont ils estoient chargez, en attachant un fil GL à une balance en croix, je trouvay que la charge du chassis CD n'estoit pas quadruple de celle de l'autre. Celle de CD estant de 5 onc. $1\frac{1}{2}$ gros, ou $41\frac{1}{2}$ gros, et l'autre de $1\frac{1}{2}$ once ou 12 gros, de sorte que, si elles eussent esté en proportion quadruple, l'abattement auroit esté plus près en mesme temps.

Quand le chassis CD s'abatoit, il avoit environ la vitesse de 30 pieds en 4" ou 8 demi secondes. Car dans ce tems, que l'on contoit depuis son abattement, à une pendule, le traineau parcouroit cet espace, la roue A estant entretenue dans la mesme vitesse de mouvement.

Il s'ensuit de cette expérience que les forces de l'air contre une surface sont en raison double de ses vitesses, ce qui a été prouvé de même par nos autres expériences, en faisant souffler l'air par des ouvertures de mesure déterminée.

Il s'ensuit aussi, en supposant la vitesse de 28 pieds en 4'' au lieu de 30 pieds, comme j'ay trouvé qu'il falloit la rectifier, pour correspondre avec les autres expériences du souffle, il s'en suit dis-je, que l'air soufflant contre un plan de 1 pied quarré, avec la vitesse de 10 pieds en 1'' de tems, fera impression egale à 9 onces fort près, ce qui peut servir de fondement tant pour calculer la force du vent contre des surfaces connues, quand la vitesse du vent l'est aussi, que pour calculer sa vitesse, lorsque la quantité de son impression contre une surface donnée est connue.

Estant posé avec cela (comme il est vrai) que les impressions de même vitesse contre des surfaces différentes sont comme leurs grandeurs, et que les impressions de différentes vitesses, contre des surfaces égales, sont comme les quarrés des vitesses. »

Hac opportunitate Hugenus Anemometrum descripsit, cujus fabricam et usum tum ex fig. 31. tum ex sequenti brevi Hugonii explicatione omnes, vel me tacente, intelligent :

» Bras AB égal à CD. Le vent souffle contre la surface CE. Le poids F, tenant la balance en equilibrio, marque la force du vent. »

His de mediorem resistencia experimentis jam subjungamus Hugonii disquisitionem

De descensu corporum gravium et ascensu per aërem, aut materiam aliam, quae resistit motui in ratione duplicata celeritatum, ut reuera contingit.

1. Sit (fig. 32) AN quadratum, cujus latus AB', diagonalis AN. Referat AB' celeritatem terminalem, sive maximam, quam nunquam possit assequi corpus quoddam decidens per aërem, sed quantumvis

prope adaequare. Temporis partes capiantur in recta $B'N$. Quod si igitur descenderet corpus nullo aëre resistente, accrescerent ei celeritatis partes aequales, aequalibus temporis partibus, ut invenit Galileus. Itaque celeritates ita cadentis referant applicatae in triangulo ANL' parallelae NL' : sitque celeritas $L'N$ acquisita tempore $B'N$, corpori nempe non impedito; quam eandem celeritatem maximam seu terminalem esse dixi corporis impediti. Considerentur jam incrementa celeritatis corporis hujus, cui aër resistit; quae cum minora sint incrementis corporis non impediti, sumtis utrobique particulis temporis iisdem, hinc consequitur, ut, si ponatur curva ARO' , inter quam et rectam AL' applicatae, ut RB , referant celeritates acquisitas corpori impedito, necessario semper haec minor sit applicata respondente in triangulo ANL' , ut hic BX . Erunt autem trilinea ARB , ATQ inter se uti altitudines cadendo emensae temporibus AB , AQ ; et celeritates in fine aequalium temporum acquisitae, tum motu impedito tum libero, ut applicatae coincidentes ad curvam AR et rectam AN , velut BR , BX in fine temporis AB . Itemque tempora, quibus eadem celeritas ut $O'Z$ tum impedito tum libero motu acquireretur, ut lineae $\pi O'$ et $\pi T'$.

Ad examinandam vero naturam curvae ARO' , sit a puncto ejus aliquo R ducta RS parallela AL' , eaque temporis particulam referat, sitque $S\Delta$ parallela AB' et aequalis ipsi RS : unde juncta $R\Delta$ erit parallela AN , secetque $S\Delta$ curvam in T puncto. Referet ergo $S\Delta$ incrementum celeritatis in tempore RS corporis non impediti; ST vero incrementum celeritatis corporis impediti; ideoque ST minor quam $S\Delta$. Porro si AB' ponatur referre resistantiam, quam pateretur corpus impeditum, si cum terminali celeritate descenderet, velimusque invenire resistantiam, quam patitur acquisita celeritate RB , oportet duabus KB , RB facere tertiam pro-

portionalem CB, quo facto, dico CB referre resistantiam in celeritate RB, quia sunt resistantiae in duplicata ratione celeritatum. Erit autem jam, ut KB ad BC ita $S\Delta$ ad ΔT . Quia enim AB' refert resistantiam contra velocitatem terminalem, quae resistantia aequalis est vi gravitatis, qua corpus deorsum pellitur, necesse est in minimis temporum particulis, qualis putanda RS, velocitatem vi gravitatis acquisitam corpori non impedito, quae est $S\Delta$, diminui tali particula $T\Delta$, quae sit ad ΔS ut resistantia tota KB, seu ut vis gravitatis, ad resistantiam CB; atque ita superesse ST velocitatem acquisitam tempore eodem RS corpori impedito: quamobrem tempore WO' acquireret celeritatem WR, quia ut RS ad ST ita censenda est OW ad WR.

Sit $AB' = a$, $AP = x$. Ergo et $RB = x$. Et quia proportionales KB, RB, CB, erit KB ad BC, ut a ad $\frac{x x}{a}$, et BK ad KC ut a ad $a - \frac{x x}{a}$. Ergo etiam ΔS ad ST, hoc est RS ad ST, hoc est OW ad WR, vel etiam $R\xi$ ad $\xi\mu$ (nam pro recta linea habetur $TR\mu$, cum sit curvae particula minima) ut a ad $a - \frac{x x}{a}$. Quod si vero AP in particulas minimas aequales secetur, punctis ϕ, σ , a quibus ducuntur ad curvam AO' rectae $\phi\rho, \sigma\mu$, parallelae AB, et rursus $\rho\nu, \mu\xi$ complentes rectangula $\sigma\rho, P\mu$, et successive $\sigma A, \phi A$, vocentur x , ut ante PA, semper exprimentur rationes $\mu\nu$ ad $\nu\rho$, et $\rho\phi$ ad ϕA , rationibus a ad $a - \frac{x x}{a}$. Et erunt invertendo $\mu\xi$ ad $\xi R, \nu\rho$ ad $\mu\nu, A\phi$ ad $\phi\rho$, ut $a - \frac{x x}{a}$ ad a . Sunt autem omnes antecedentes $\mu\xi, \nu\rho, A\phi$, aequales. Ergo si particulis rectae $A\sigma$ sumantur particulae $\nu\nu$ aequales in recta $\gamma\delta$,

quam aequalem pono AB' , et in quadrate $\gamma\delta\phi\alpha$ ducantur parallelae $\eta\kappa$; sicut autem $\xi\mu$ ad ξR , hoc est ut $a - \frac{x x}{a}$ ad a , ita fiat

$\omega\kappa = a$, ipsi $R\xi$ respondens, ad $\omega\lambda$; erit haec $= \frac{a^3}{a a - x x}$; et ita

exprimentur quoque singulae $\eta\lambda$, quae erunt ad $\kappa\lambda$ sicut sibi respondentes $\mu\nu, \rho\phi$, postquam singulae $\eta\gamma$ dictae fuerint x . Jamque sicut omnes simul $A\phi, \phi\sigma, \sigma P$, sive tota AP , ad omnes $\phi\rho, \nu\mu, \xi R$, sive ad totam PR , ita erunt omnes $\kappa\eta$ ad omnes $\lambda\eta$, atque ita propterea rectangulum $\alpha\omega$ ad spatium $\gamma\alpha\pi\omega$. Et singula spatia $\lambda\eta\gamma\alpha$ referent singulas rectas spatii RPA singulis $\lambda\eta$ respondentes.

Haec vero singula spatia, inter $\lambda\eta, \alpha\gamma$, interjecta, mensurantur summa progressionis numericae; singulae enim $\lambda\eta = \frac{a^3}{a a - x x}$,

posito nempe x pro singulis $\eta\gamma$, quae ipsarum $\lambda\eta$ distantias ab $\alpha\gamma$

definiunt; $\frac{a^3}{a a - x x}$ vero aequale $a + \frac{x x}{a} + \frac{x^4}{a^3} + \frac{x^6}{a^5} + \text{etc.}$, et si

pro a unitas ponatur, fit $1 + x x + x^4 + x^6 + \text{etc.}$; ac porro, si maxima linearum $\eta\gamma$, ut hic $\omega\gamma$, vocetur b , et x successive significet aequaliter crescentes $\gamma\eta$, quarum minima, sive excessus, quibus crescunt, dicatur p , et numerus particularum p in $\omega\gamma$ seu b comprehensarum dicatur θ , erit quae ab $\alpha\gamma$

prima sequitur $\eta\lambda = 1 + p p + p^4 + p^6 + \text{etc.}$

secunda $\eta\lambda = 1 + 4 p p + 16 p^4 + 64 p^6 + \text{etc.}$

tertia $\eta\lambda = 1 + 9 p p + 81 p^4 + 729 p^6 + \text{etc.}$

et ita porro, maxima autem $\eta\lambda$,

quas infinitas numero ponimus

erit $\omega\lambda = 1 + \theta^2 p p + \theta^4 p^4 + \theta^6 p^6 + \text{etc.}$

sive quia θp particula una in
multitudinem particularum ducta

facit δ , erit $\alpha \lambda = 1 + \delta \delta + \delta^2 + \delta^3 + \text{etc.}$

et summae columnarum, hoc est

omnium $\gamma \lambda$, erant $= \theta + \frac{1}{2} \theta \delta \delta + \frac{1}{2} \theta \delta^2 + \frac{1}{2} \theta \delta^3 + \text{etc.}$

et ductis omnibus in latitudi-

nem p fiet spatium $\alpha \Pi \omega \gamma$ $= p \theta + \frac{1}{2} p \theta \delta^2 + \frac{1}{2} p \theta \delta^3 + \frac{1}{2} p \theta \delta^4 + \text{etc.}$

Seu quia $p \theta = \delta$, erit idem spa-

tium $\alpha \Pi \omega \gamma$ $= \delta + \frac{1}{2} \delta^3 + \frac{1}{2} \delta^5 + \frac{1}{2} \delta^7 + \text{etc.}$

Est autem $\gamma \omega$ fractio unitate minor, quia $\gamma \delta$ est unitas, unde fit ut
membra progressionis ejusmodi continue decrescant, atque eo magis
quo $\gamma \omega$ minor pars fuerit $\gamma \delta$.

Hanc vero progressionem aequari sectori hyperbolice Newtoni
inde inveni, quod eadem progressionem sector ille efficitur; quod
et aliter animadvertere potui ex quadraturis Mercatoris et Wallisii,
quam hic illum imitatus praevidit. Posita enim (fig. 33) hyperbola
BG, cujus asymptoti AH, AE, quadratum vero AB; sumatque
AD majore quam AC, si AD sit $= i$, DE vero fractione minor uni-
tate, quae fractione vocetur δ , fit ex quadratura Nicolai Mercatoris
spatium FDEG ad quad. HC ut

$$\delta - \frac{1}{2} \delta^2 + \frac{1}{3} \delta^3 - \frac{1}{4} \delta^4 + \frac{1}{5} \delta^5 - \text{etc. ad 1.}$$

Item posita DC = DE, fit ex quadratura Wallisii spatium FBCE
ad quad. HC ut

$$\delta + \frac{1}{2} \delta^2 + \frac{1}{3} \delta^3 + \frac{1}{4} \delta^4 + \frac{1}{5} \delta^5 + \text{etc. ad 1.}$$

Ergo spatium BGEC ex duobus illis compositum erit ad quadr.
BA ut $2\delta + \frac{2}{3} \delta^3 + \frac{2}{5} \delta^5 + \text{etc. ad 1}$; quam progressionem singulos
terminos duplos habere apparet nostrae praecedentis progressionis
 $\delta + \frac{1}{2} \delta^3 + \frac{1}{3} \delta^5 + \text{etc.}$ Unde et nostram aequari constat spatium ejus-
modi hyperbolico, quod nempe dimidium erit spatii BGEC, hoc

est spatium $BLKC$, sive sectori hyperbolico Newtoni BAL , posita AK media proportionali inter AC , AE ; sic enim fiunt quoque proportionales BC , LK , GE , ideoque spatia $BLKC$, $LGEK$ inter se aequalia. Hinc optima ratio progressionum ad inveniendos logarithmos, praecipue si CD sit ad DA ut unitas ad numerum, hoc est, si AE ad AC sit ut numerus ad alium binario vel unitate minorem. Sed de his alias.

Spatio nostro (fig. 32), quod nunc sit $\alpha\beta\Xi\gamma$, aequalis debebat esse sector hyperbolicus Newtoni $\alpha G'\delta$, ducta $\delta G'$ per τ , ubi rectam $\alpha\zeta$ perpend. in $\alpha\delta$ secat $\Xi\beta$ producta; est autem $\alpha G'$ hyperb. ad asymptotos $\delta\gamma$, δN . Sicut enim $A\pi$ ad $\pi O'$ ita est rectangulum $\alpha\Xi$ ad spatium $\alpha\beta\Xi\delta$, ex demonstrata curvarum harum natura. Quare et $\pi T'$ erit ad $\pi O'$ ut rectangulum $\alpha\Xi$ ad spatium $\alpha\beta\Xi\gamma$. Est autem $\pi T'$ ad $\pi O'$ ut tempus, quo corpus non impeditum acquisivit celeritatem $O'Z$, ad tempus quo corpus impeditum acquisivit celeritatem eandem. Jam quia Newtonus, posita celeritate acquisita ad celeritatem terminalem ut αT ad $\alpha\zeta$, quarum ratio est eadem quae $A\pi$ ad AB' , quam nos adsumsimus, invenit tempus descensus non impediti ad tempus impediti, quibus obtinetur celeritas eadem αT , sicut triangulum $\alpha\delta T$ ad sectorem hyperbolicum $\alpha\delta G'$: estque triang. $\alpha\delta T$ aequale rectangulo nostro $\alpha\Xi$; necesse est et sectorem $\alpha\delta G'$ aequari spatio nostro $\alpha\beta\Xi\gamma$, si recte se habent inventa Newtoni; unde primum didici progressionem meam $b + \frac{1}{3}b^3 + \frac{1}{5}b^5 + \text{etc.}$ aequari spatio hyperbolico.

Ut inquiramus porro quam rationem habeat altitudo emensa motu impedito, dum acquiritur celeritas data ZO' , ad altitudinem eodem tempore $\pi O'$ emensam cum celeritate dimidia celeritatis terminalis, scimus primum haec spatia esse inter se sicut trilineum $A O' Z$ ad dimidium rectanguli $B' Z$, sive ad triangulum $A\zeta Z$. Jam cum sit spat. $A O' \pi$ ad rectang. πZ ut omnes ϕ, ϵ, μ, PR , $\pi O'$ ad totidem

dem maximae $\pi O'$ aequales; hoc est, sicut summa spatiorum omnium $\alpha \lambda \eta \gamma$ ad totidem maximo $\beta \alpha \gamma \Xi$ aequalia; hoc est, ut cuneus anguli semirecti super spatio $\alpha \beta \gamma \Xi$ per $\beta \Xi$ abscissus, ad prisma super eodem spatio $\alpha \beta \Xi \gamma$ cum altitudine $\gamma \Xi$: sequitur hinc trilineum alterum $A O' Z$ esse ad dictum rectang. πZ , ut cuneus alter super spatio $\alpha \beta \Xi \gamma$ abscissus per $\alpha \gamma$ ad idem prisma super spatio $\alpha \beta \Xi \gamma$. ⁽¹⁾ Quia constat hunc cuneum cum priori constituere simul prisma jam dictum, sicut trilinea $A O' \pi$ et $A O' Z$ constituunt rectangulum πZ . Atqui cuneus super spatio $\alpha \beta \Xi \gamma$ abscissus per $\alpha \gamma$ aequalis est ei, quo cuneus super rectangulo $\beta \gamma$ abscissus per $L' \gamma$ superat cuneum simul abscissum super spatio trilineo $\alpha \beta L'$: quem cuneum ajo aequallem esse prismati super trilineo hyperbolico $\alpha D' L'$, altitudinem habenti dimidiam $\delta \gamma$. Quod hoc modo demonstro. Si enim ducatur recta aliqua, ut $A' L'$, parallela $\gamma \delta$, ac secans curvam $\alpha \lambda \lambda$, ut hic in β , fiatque duabus $A' L'$, $\beta L'$ tertia proportionalis $D' L'$, erit punctum D' ad hyperbolam $\alpha D' G'$ ante descriptam per α punctum ad asymptotos

(¹) In margine adscripsit Hugenius: Poterat hoc de cuneo altero brevius inveniri et absque consideratione prioris; quia sicut singulae particulae temporis $\Lambda \theta$, $\theta \chi$, χB , $B Z$ ductae in celeritates respectivas in fine eorum temporum acquisitas, ut θe , $\chi \mu$, $B R$, $Z O'$, efficiunt spatium totum $A O' Z$, dum rectang. πE efficitur ex $A Z$ summa omnium particularum temporis ducta in celeritatem dictarum maximam $Z O'$; ita quoque omnes $\beta \Xi$, $\lambda \eta$, quae sunt ut tempuscula $O' W$, $R \xi$, $\mu \nu$, $\rho \phi$, hoc est $Z B$, $B \chi$, $\chi \theta$, θA , ductae in easdem celeritates respectivas $\gamma \Xi$, $\gamma \omega$, γE etc., referent spatium $A O' Z$, dum summa omnium $\beta \Xi$, $\lambda \omega$, cet., hoc est spatium $\beta \alpha \gamma \Xi$ ductum in celeritatem eandem maximam $\gamma \Xi$, sive $Z O'$ refert rectangulum πZ . Sed omnes $\beta \Xi$, $\lambda \eta$ ductae in respectivas $\gamma \Xi$, $\gamma \omega$, γE faciunt cuneum super spatio $\alpha \beta \Xi \gamma$ abscissum per $\alpha \gamma$ in angulo semirecto. Hinc, cum lineae $\lambda \eta$ sint $\frac{a^3}{a a - x x}$, ubi x significant $\gamma \eta$ respectivas et aequaliter crescentes, erunt producta ex singulis $\lambda \eta$ in respectivas x , $\frac{a^3 x}{a a - x x}$ et non, ut vult Leibnitzius, $\frac{a a x}{a a - x x}$.

$\delta B', \delta \gamma$. Nam ponendo $A'L' = a$, $\beta L' = x$, inventum fuit supra esse $\beta \pi$, quae vocetur y , aequalem $\frac{a^3}{aa - xx}$; unde erit $\beta L'$ sive $x = \frac{\sqrt{aay - a^3}}{y}$; et, quia $A'L'$ est a , invenitur tertia proport. duabus

$A'L', \beta L'$, quae erat $D'L'$, aequalis $\frac{ay - aa}{y}$; sit $D'L' = z$, ergo $ay - aa = zy$, et $ay - zy = aa$. Unde liquet punctum D' esse ad hyperbolam dictam, quae per a punctum ad asymptotos $\delta B', \delta \gamma$ descripta est. Quia itaque $A'L'$, quae secatur curvam $a\lambda$ in β et hyperbolam $aD'G'$ in D' , ita iis punctis dividitur, ut sint proportionales $A'L', \beta L', D'L'$, erit rectang. ex $A'L', L'D'$ aequale quadrato ex $\beta L'$: quod cum semper eveniat, ubicumque ducatur recta ipsi $A'L'$ parallela, sequitur, si tales parallelae ducantur in rectangulo $A'a$, quae latus ejus $A'\psi$ in particulas aequales dividant, fore omnia rectangula ex ductu harum parallelarum in partes earum inter aL' et hyperbolam aD' interceptas, aequalia omnibus quadratis partium interceptarum inter aL' et curvam $a\lambda\beta$. Vel, sumtis omnium dimidiis, erit summa rectangulorum ex omnibus interceptis spatii $D'L'$ in dimidias $L'A'$, aequalis summae semiquadratorum ab omnibus interceptis in spatio $a\beta L'$, atque ista summa rectang. efficit prisma super spatio $aD'L'$, cum altitudine $\frac{1}{2} A'L'$: Similique ratione summa illa semiquadratorum efficit cuneum super spatio $a\beta L'$ abscissum per aL' angulo semirecto. Ergo illud prisma huic cuneo aequale est, ut dicebamus.

Est autem et cuneo super rectang. $\beta\gamma$ abscisso per $a\gamma$ aequale prisma super rectangulo $D'\gamma$ cum altitudine $\frac{1}{2} A'L'$, propter proportionales $A'L', \beta L', D'L'$. Ergo, cum ante ostensum fuerit id, quo cuneus super rectang. $\beta\gamma$ per $a\gamma$ abscissus superat cuneum simul abscissum super spatio $a\beta L'$, aequari cuneo super spatio $a\beta \pi \gamma$

per $\alpha\gamma$ abscisso; erit hic cuneus aequalis differentiae, qua prisma dictum super rectang. $D'\gamma$ cum altitudine $\frac{1}{2} A'L'$ superat prisma super spatio $\alpha D'L'$ cum eadem altitudine $\frac{1}{2} A'L'$; hoc est prismati super spatio $\alpha D'E\gamma$ cum dicta altitudine $\frac{1}{2} A'L'$.

Ostensum vero fuit trilineum $A O' Z$ esse ad rectang. πZ , ut cuneus super spatio $\alpha\beta\Xi\gamma$ per $\alpha\beta$ abscissus ad prisma super spatio $\alpha\beta\Xi\gamma$ cum altitudine $\gamma\Xi$. Ergo jam erit trilineum $A O' Z$ ad rectang. πZ ut prisma super spatio $\alpha D'E\gamma$ cum altitudine $\frac{1}{2} A'L'$ ad prisma super spatio $\alpha\beta\Xi\gamma$, cum altitudine $\gamma\Xi$, hoc est in ratione composita ex ratione spatii $\alpha D'E\gamma$ ad spatium $\alpha\beta\Xi\gamma$, et ex ratione $\frac{1}{2} A'L'$ ad $\beta L'$. Est autem rectang. πZ ad triangulum $A\zeta Z$ ut $O'Z$ ad dimidiam ζZ , sive ut $\beta L'$ ad $\frac{1}{2} A'L'$. Ergo, cum ratio triang. $A\zeta Z$ ad spatium $A O' Z$ componatur ex ratione triang. $A\zeta Z$ ad rect. πZ , et rectanguli πZ ad spatium $A O' Z$; erit jam ratio trianguli $A\zeta Z$ ad spatium $A O' Z$ composita ex ratione $\frac{1}{2} A'L'$ ad $\beta L'$ et spatii $\alpha\beta\Xi\gamma$ ad spatium $\alpha D'E\gamma$, et $\beta L'$ ad $\frac{1}{2} A'L'$, quae posterior ratio tollit primam. Ergo erit triang. $A\zeta Z$ ad spatium $A O' Z$ ut spatium $\alpha\beta\Xi\gamma$ ad spatium $\alpha D'E\gamma$. (1) Ergo hanc eandem rationem habebit

(1) In margine annotavit Hugenius: Non opus erat longa ista demonstratione ad hoc probandum. Idem enim breviter sic. Rectang. $B'Z$ fit ex tempusculis singulis $O'W$, $R\xi$, $\mu\nu$, $\sigma\phi$ in totidem $B'A$ ductis. Spatium vero $A O' Z$ fit ex iisdem singulis tempusculis $O'W$, $R\xi$, $\mu\nu$, $\sigma\phi$ ductis in applicatas in singulis ad rectam AZ . Vel quia tempuscula illa sunt ut $\eta\beta$, $\omega\lambda$ etc., erit summa productorum ex $\eta\beta$, $\omega\lambda$, cet., in totidem $B'A$ vel $\delta\gamma$, hoc est prisma super spatio $\beta\Xi\gamma\alpha$, cum altitudine $\delta\psi$ ad summam productorum earundem $\eta\beta$, $\omega\lambda$, in singulorum distantias, ab recta $\alpha\gamma$, hoc est ad cuneum super spatio $\beta\Xi\gamma\alpha$, ut dictum rectangulum $B'Z$ ad spat. $A O' Z$. Est autem cuneus aequalis prismati ex spatio hyperbolico $\alpha D'E\gamma$ cum altitudine $\frac{1}{2} \delta\gamma$, ut ostensum; ergo, ut prisma super $\beta\Xi\gamma\alpha$, cum altitudine $\delta\gamma$ ad prisma super $\alpha D'E\gamma$ cum $\frac{1}{2}$ altitudine $\delta\gamma$, hoc est duplum spatii $\beta\Xi\gamma\alpha$, ad spatium $\alpha D'E\gamma$, ita rectang. $B'Z$ ad spat. $A O' Z$. Ideoque ut spat. $\beta\Xi\gamma\alpha$ ad spat. $\alpha D'E\gamma$, ut triang. $A\zeta Z$ ad spat. $A O' Z$.

quoque altitudo emensa tempore AZ cum celeritate dimidia terminali ad altitudinem eodem tempore AZ emensam casu impedito. Quod erat inveniendum. Et convenit cum Newtonianis prop. 9 Lib. 2. Sed corrigendum ibi lin. 7 et 10 ac legendum ABNK pro ABRP. Et lin. [8] pro: *cum semisse velocitatis maximae*, legendum *cum velocitate maxima*; sicut recte postea pag. eadem ubi, de ascensu. Fit enim ipsius spatium hyperbolicum ABNK, quod in meo schemate est $\alpha\iota\iota\upsilon$, dimidium mei $\alpha D' E \gamma$. Invenitur autem spatium $\alpha\beta\Xi\gamma$ aequale spatium hyperbolicum, quod sit loco sectoris $\alpha G' \delta$, si ponatur ut $A' \beta$ ad $\beta L'$ ita $\delta\psi$ ad $\psi\zeta$, et sumatur ipsi $\psi\zeta$ aequalis ψM , interque $M\delta$, $\delta\psi$ inveniatur media proportionalis $F\delta$; et fiat FG' parall. $B'A$. Erit enim spatium $\alpha\psi F G'$ aequale spatio $\alpha\beta\Xi\gamma$; quod logarithmis jam exprimi potest. Est enim $= \frac{1}{2} \log. \frac{\alpha + x}{\alpha - x}$.

Ponendum autem quadr. $\alpha\delta$ sive $\alpha\alpha = 0,4342955$, qualium log. 10 est 1,0000000. Quod si x sit $= \frac{1}{2} \alpha$, fit jam spatium $\alpha\beta\Xi\gamma = \frac{1}{2} \log 3$.

Similiter spatium $\alpha D' E \gamma$, logarithmo expressum, fit $= \log. \frac{\alpha\alpha}{\alpha\alpha - xx}$:

et, si $x = \frac{1}{2} \alpha$, log $\frac{1}{4}$. Est enim spatium $\alpha D' E \gamma$ relatum ad quadr. $\alpha\delta$ aequale logarithmo rationis νE ad $\alpha\gamma$, sive $\alpha\psi$ ad $D'A'$, h. e. α ad $\alpha - \frac{xx}{\alpha\alpha}$, sive $\alpha\alpha$ ad $\alpha\alpha - xx$.

Invenio autem et rationem trilinei $A O' Z$ ad triang. $A \sigma Z$, hoc est rationem altitudinis emensae casu impedito ad altitudinem emensam eodem tempore casu non impedito, donec utrimque perveniatur ad celeritatem datam $A \pi$, esse in ratione composita ex ratione spatii $\alpha D' E \gamma$ ad $\alpha\beta\Xi\gamma$ et quadrati $\alpha\delta$ ad $\alpha\beta\Xi\gamma$, hoc est, ex ratione $\log. \frac{\alpha\alpha}{\alpha\alpha - xx}$ ad $\frac{1}{2} \log. \frac{\alpha + x}{\alpha - x}$, et $\alpha\alpha$ ad $\frac{1}{2} \log. \frac{\alpha + x}{\alpha - x}$.

Ratio enim spatii $A O' Z$ ad triang. $A \sigma Z$ componitur ex rationi-

bus spatii $A'O'Z$ ad rectang. πZ et rectanguli πZ ad triang. $A\sigma Z$. Sed ostensum est rationem spatii $A'O'Z$ ad rect. πZ componi ex ratione spatii $\alpha D'E\gamma$ ad spat. $\alpha\beta\Xi\gamma$, et ex ratione $\frac{1}{2} A'L'$ ad $\beta L'$. Rationem vero alteram, rectanguli πZ ad triangulum $A\sigma Z$, constat eandem esse, quae $O'Z$ ad $\frac{1}{2} Z\sigma$, hoc est, quae $\pi T'$ ad $\frac{1}{2} \pi O'$, hoc est, quae rectanguli $\alpha\Xi$ ad $\frac{1}{2}$ spat. $\alpha\beta\Xi\gamma$, quae, posito ss pro spatio $\alpha\beta\Xi\gamma$, est eadem composita ex $\alpha\gamma$ seu $A'L'$ ad s , et $\gamma\Xi$ sive $\beta L'$ ad $\frac{1}{2} s$. Itaque ratio spatii $A'O'Z$ ad triang. $A\sigma Z$ erit composita

$$\text{ex rationibus } \left\{ \begin{array}{lcl} \text{spat. } \alpha D'E\gamma & \text{ad spat. } \alpha\beta\Xi\gamma. \\ \frac{1}{2} A'L' & , & \beta L' \\ A'L' & , & s \\ \beta L' & , & \frac{1}{2} s \end{array} \right\}$$

hoc est, quia $\beta L'$ se mutuo tollunt, ex rationibus $\alpha D'E\gamma$ ad spatium $\alpha\beta\Xi\gamma$, et $\frac{1}{2}$ quadr. $A'L'$ ad $\frac{1}{2} ss$, seu $\frac{1}{2} \alpha\beta\Xi\gamma$; sive et quadr. $A'L'$ seu $\alpha\delta$ ad spat. $\alpha\beta\Xi\gamma$. Quod erat demonstrandum.

Colligitur igitur ex jam demonstratis, si velocitates aequaliter crescentes dicantur x , maxima seu terminalis velocitas sit α , tempora fore sicut summas rectarum $\frac{\alpha^3}{\alpha\alpha - xx}$, quod recte habet et Leibni-

tius. Spatia vero cadendo emensa, ut summas $\frac{\alpha^3 x}{\alpha\alpha - xx}$, cum

Leibn. habeat summas $\frac{\alpha\alpha x}{\alpha\alpha - xx}$. Tempora vero, sive summas

rectarum $\frac{\alpha^3}{\alpha\alpha - xx}$ fore $\frac{1}{2}$ logar. $\frac{\alpha + x}{\alpha - x}$, (hic x significat velocitatem

in fine temporis acquisitam, ut in reliquis deinceps, et deberet pro eo scribi x majus) ubi Leibnitius habet log. $\frac{\alpha - x}{\alpha + x}$, seu, quia ponit

$\alpha = 1$, log. $\frac{1 - x}{1 + x}$. Recte quidem dixerat tempora esse ut loga-

rithmos rationis $a+x$ ad $a-x$, sed non bene videtur scribere $\log. \frac{a-x}{a+x}$ pro logarithmo rationis $a+x$ ad $a-x$, quia talis fractionis logarithmus fit negativus. Non erravit etiam, quod tempora dixerit esse ut logarithmos rationis $a+x$ ad $a-x$, cum tamen mihi sunt ut $\frac{1}{2}$ logarithmi rationis hujus $a+x$ ad $a-x$, quia eadem est ratio logarithmorum ac $\frac{1}{2}$ logarithmorum inter se. Sed tunc pro tempore quo, casu non impedito, acquiritur velocitas terminalis, non est ponendum hyperbolae quadratum aa sive 1, ut Newtonus fecit, et ipse voluit, ut puto, Leibnitius. Invenio etiam spatia descendendo emensa fore ut logarithmos $\frac{aa}{aa-xx}$, cum Leibnitius habeat $\log. \sqrt{aa-xx}$ vel $\log. \sqrt{1-xx}$. Rursus hic inverse posuisse videtur pro logarithmo rationis aa ad $aa-xx$, logarithmum $\frac{aa-xx}{aa}$, sive quia aa est unitas, logarithmum $(1-xx)$. Sed cum ponat $\log. \sqrt{1-xx}$, erravit rursus, quia debebat dicere $\log. 1-xx$, ut posset referri ad $aa=1$. Nam alioquin eadem est ratio logarithmorum radicum, quae logarithmorum quadratorum ab iisdem radicibus, ut jam antea dictum fuit. Puto ipsum vice versa errasse in apponendo signo $\sqrt$ adeoque, ubi $\frac{1}{2} \log. \frac{a-x}{a+x}$ seu $\log. \sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$ scribere debuerat, scripsisse $\log. \frac{a-x}{a+x}$. Et ubi debebat esse $\log. (1-xx)$ scripsisse $\log. \sqrt{(1-xx)}$, et tamen saepius jam calculum suum correxerat.

AB seu $B'N$ est ad Ox ut quad. ax ad spat. $ax\pi y$, seu ad $\frac{1}{2} \log. \frac{a+x}{a-x}$; si quad. ax sit quadr. hyperbolae. Et posito hoc quadrato = 43429, etc., uti poterimus logarithmis tabul.

Notatu dignum quod spatium $A'O'Z$ semper dimidium sit spatii hyperbolici $D'a\gamma E$.

Nam cum spatium $\alpha\beta\Xi\gamma$ sit ad rectang. $\alpha\Xi$ ut $O'\pi$ ad πA , ex ante demonstratis, hoc est ut rectang. $A\zeta$ ad rectang. ex AB' , $A\pi$, seu rectang. $\alpha\Xi$; sequitur hinc spatium $\alpha\beta\Xi\gamma$ aequari rectang. $A\zeta$. Atqui ostensum fuit triangulum $A\zeta Z$, seu $\frac{1}{2}$ rectang. $A\zeta$, esse ad spatium $A'O'Z$, ut spatium $\alpha\beta\Xi\gamma$ ad spatium $\alpha D'E\gamma$; ergo etiam $\frac{1}{2}$ spatii $\alpha\beta\Xi\gamma$ ad spat. $A'O'Z$ ut spatium totum $\alpha\beta\Xi\gamma$ ad spat. $\alpha D'E\gamma$. Et permutando ut 1 ad 2, ita spat. $A'O'Z$ ad spat. hyperbolicum $\alpha D'E\gamma$.

2. Sit (fig. 34) quadratum $B'V$, cujus diagonalis AN . Latus vero AB' referat celeritatem terminalem, quam superare non possit grave per aërem cadens. Ponatur autem nunc illa celeritate terminali sursum projici. Et quaeratur primum tempus totius ascensus impediti, seu ratio ejus ad tempus totius ascensus non impediti, atque etiam altitudo totius ascensus impediti ad altitudinem totius ascensus non impediti.

Scimus celeritatem sursum libere tendentis diminui aequaliter aequalibus temporis partibus. Ideoque si tempora talis ascensus accipiantur in latere quadrati $B'N$, quo totius ascensus tempus designetur, celeritates recte designari per applicatas in triangulo $NB'A$, lateri AB' parallelas. Veluti, si tempus ascensus sit $B'B$, celeritatem corporis non impediti in fine ejus temporis fore BX , ratione nimirum celeritatis terminalis AB' .

Sed celeritatem reliquam in motu impedito, exacto tempore eodem $B'B$, constat minorem fore quam BX . Sit ergo BR ; sitque curva ARG , cujus applicatae ad NB' referant celeritates relictas in motu impedito. Totum vero tempus ascensus impediti erit GB' , ac minus quidem tempore ascensus liberi $B'N$.

Itemque altitudo tota ascensus impediti ad non impediti erit ut

spatium $ARGB$ ad triangulum $AB'N$, quoniam utraque altitudo fit ex particulis temporis in celeritates iis temporum articulis existentes.

Ad inquirendum vero naturam curvae ARG , sit e puncto ejus aliquo R ducta recta minima RS parallela $B'N$, et ST parallela AB' , quae occurrat curvae in T ; sitque $R\Delta$ parallela AN . Referet ergo $S\Delta$ decrementum celeritatis non impeditae per temporis particulam RS , impeditae vero celeritatis decrementum per tempus idem RS erit ST , ut quidem $S\Delta$ sit ad ΔT sicut quadratum KB ad quadratum RB ; quia resistentiae sunt in duplicata ratione celeritatum. Et in minimo tempore eandem rationem habere recte censentur particulae celeritatis amissae, quam resistentiae ipsas producentes. Erat autem $S\Delta$ particula celeritatis amissa ex resistentia gravitatis, sive etiam quam resistentia tota terminalis tempore RS effectura erat.

Quod si igitur AB sit a , et BR celeritas $= x$, erit $S\Delta$ ad ΔT sicut aa ad xx ; et ST ad $S\Delta$ ut $aa + xx$ ad aa . Unde et ST ad SR , sive RW ad WT , ut $aa + xx$ ad aa . Si divisa igitur intelligatur tota AB' in particulas aequales $P\sigma$, $\sigma\phi$, $\sigma B'$ etc. itemque PR , σT , $\phi\rho$ ad curvam AG , et rursus RW , $T\xi$, $\rho\theta$, erit in singulis trilineis minimis RWT , $T\xi\rho$, $\rho\theta G$, basis ad perpendicularem, ut $aa + xx$ ad aa , si nempe vocentur successive x applicatae RB , Tx , $\rho\theta$, quae fiunt productis basibus istis.

Sit $\delta\psi = \delta A$, et $\gamma\theta\psi$ parabola vertice γ . Ad hanc continuatae RP , $T\sigma$, $\rho\phi$, facient singulas $P\theta$, $\sigma\theta$, $\phi\theta = a + \frac{xx}{a}$; unde, si fiat duabus θP , ΞP tertia proport. βP , et sic porro, erunt singulae βP , $\lambda\sigma$, $\lambda\phi = \frac{a^3}{aa + xx}$; hoc est rationes ΞP ad βP , $\omega\sigma$ ad $\lambda\sigma$, $\eta\phi$ ad $\lambda\phi$, etc. singulae eadem, quae RW ad WT , $T\xi$ ad $\xi\rho$, $\rho\theta$ ad θG ; ideoque quadratum totum $A\gamma$ ad spatium $\gamma\beta QAB'$ ut recta $B'A$,
seu

seu $B'N$, ad $B'G$. Atqui, ob singulas $\lambda\phi$, $\lambda\sigma$, $\beta P = \frac{a^3}{aa+xx}$, constat ex Nicol. Mercatoris methodo, secundum Leibnitsii quadraturam circuli, summam omnium harum, hoc est spatium $\gamma\beta QAB'$ esse aequale circulo intra quadr. $A\gamma$ inscripto.

Ergo ut quadratum ad circulum sibi inscriptum ita est hic NB' tempus ascensus liberi ad GB' tempus ascensus impediti.

Ad altitudinum porro rationem investigandam, quae sunt hic ut triang. ANB' ad spatium AGB' , constat ex jam dictis rectam $\rho\phi$ referri spatio $A\phi\lambda Q$, rectam $\tau\sigma$ spatio $A\sigma\lambda\phi$, atque ita porro. Unde omnium $\rho\phi$, $\tau\sigma$, etc. summa, hoc est spatium $GB'A$ referatur summa omnium $A\phi\lambda Q$, $A\sigma\lambda Q$, hoc est cuneo anguli semirecti super spatio $B'AQ\beta\gamma$ abscisso per $B'\gamma$.

Hujus vero cunei solidum ut noscatur, fiat duabus $A'L'$, $\beta L'$ tertia proportionalis $D'L'$; erit jam punctum D' ad hyperbolam transeuntem per γQ , habentemque asymptoton $B'A$. Quia enim, posita $\beta I' = x$, inventa fuit $\beta P = \frac{a^3}{aa+xx}$, $D'L'$ autem est $\frac{xx}{a}$,

si βP sive $B'L'$ vocetur y , et $D'L'$ vocetur z , erit $\frac{a^3}{aa+xx} = y$,

et $\frac{xx}{a} = z$, sive $xx = az$, unde, restituto valore xx , erit

$y = \frac{a^3}{aa+az}$, sive $\frac{aa}{a+z}$, atque adeo $ay + zy = aa$, unde facile

apparet punctum D' esse ad hyperbolam $\gamma D'Q$, uti diximus. Quia porro rectang. $A'L'D'$ aequale est quadrato ex $\beta L'$, idque in omnibus applicatis parallelis, erit prisma super spatio $\gamma D'Q\Lambda$, cum altitudine $\delta\gamma$, aequale quadratis omnibus $\beta L'$ et reliquarum applicatarum ad curvam $\gamma\beta Q$. Ideoque prismatis illius dimidium aequale cuneo super spatio $\gamma\beta Q\Lambda$ abscisso per $\gamma\Lambda$. Est autem et prismatis

super rectangulum $\Lambda\Lambda$ cum altitudine $\delta\gamma$ dimidium aequale cuneo super idem rectangulum $\Lambda\Lambda$ per $B'\Lambda$ abscisso. Ergo prisma super spatio toto $D'\beta QAB'$ cum dimidio altitudinis $\delta\gamma$ aequabitur cuneo super spatio toto $\gamma\beta QAB'$ abscisso per $B'\gamma$.

Est autem prisma super $\gamma\beta QAB'$ ad cuneum super idem $\gamma\beta QAB'$ per $B'\gamma$, ut rectang. OB' ad trilineum $GB'A$. Ergo etiam prisma super $\gamma\beta QAB'$ cum altitudine $\delta\gamma$, ad prisma super $\gamma D'QAB'$ cum altitudine $\delta\gamma$ ut rectangulum OB' ad trilineum $GB'A$. Ergo et spatium $\gamma\beta QAB'$ ad $\frac{1}{2}$ spat. $\gamma D'QAB'$ ut rectangulum OB' ad trilineum $GB'A$. Sed per ante ostensa erat quadratum $B'\delta$ ad spat. $\gamma\beta QAB'$ ut quadr. VB' ad rectangulum $B'O$, sunt enim haec ut NB' ad GB' . Itaque jam ex aequo erit quadr. $B'\delta$ ad $\frac{1}{2}$ spatium $\gamma D'QAB'$ ut quadratum VB' ad trilin. $GB'A$. Sunt autem quadrata $B'\delta$, VB' aequalia, ergo et $\frac{1}{2}$ spatium hyperbolicum $\gamma D'QAB'$ aequale trilineo $GB'A$, unde et $\frac{1}{2}$ spat. $\gamma D'QAB'$ ad $\frac{1}{2}$ quadr. $B'\delta$; seu totum ad totum, ut trilineum $GB'A$ ad $\frac{1}{2}$ quadr. $B'\delta$ sive $\frac{1}{2}$ quadr. $B'V$; quod erat inveniendum. Est autem spatium hyperbolicum $\gamma D'QAB'$ ad quadr. $B'\delta$ ut logar. binarii ad quadratum hyperbolae, hoc est ut fere 30103 ad 43430. Ergo hanc rationem habebit altitudo ascensus impediti, incipientis cum celeritate terminali, ad altitudinem ascensus liberi, eadem cum celeritate incipientis.

§ VIII.

Ad pag. 79 verba: *Voicy mon chiffre.*

Gryphus hicce exstat in Libro Advers G. pag. 83 sq. Constat duabus partibus, quarum altera explicat alteram, quae non nisi inventarum catenariae proprietatum enuntiationem continet. Numeri, quibus variae gryphi partes sunt ornati, has invicem arcto nexu cohaerere indicant. In describendo grypho rationem habuimus errorum et correctionum, quarum mentionem fecit Hugenius in ep. ad Leibn. 21 Apr. 1691, Fasc. I. p. 81.

Pars prior

*s. c. a. p. s. s. e. f. ae. u.
a. g. e. q. c. s. i. e. a. d. a.
i. f. e. c. p.*

Si catena ad parietem suspensa sit ex
filis aequalibus, utrimque annexis,
gravitate carentibus, quarum capita
sint in eadem altitudine, deturque
angulus inclinationis filorum et catenae
positus:

1. *p. i. t. i. d. q. c. p.*

Possumus invenire tangentem in dato
quolibet catenae puncto;

2. *r. ae. c. v. c. e. p.*

Rectam aequalem catenae vel cuilibet
ejus portioni;

3. *r. e. i. v.*

Radium curvatis in vertice.

- | | |
|--|--|
| 4. <i>c. ae. s. c. e. r. c. c. a.</i> | Circulum aequalem superficiei conoidis ex revolutione catenae circa axem ; |
| 5. <i>c. e. l. l. c. e. c. c. d.</i> | Constructionem et longitudinem lineae, cujus evolutione curva catenae describitur; |
| 6. <i>m. s. c. e. p. c.</i> | Mensuram sectoris cui evoluta pro centro. |
| <i>u. p. c. i. p. p. q. c. a. h.</i>
$xxyy = a^4 - aayy$
$xxyy = 4a^4 - x^4,$
<i>v. d. d. c. g. a. a. i. p. c. p.</i> | Puncta catenae inveniri possunt posita quadratura curvae alterutrius harum:
$xxyy = a^4 - aayy$, $xxyy = 4a^4 - x^4$;
vel data distantia centri gravitatis ab axe in portionibus curvae prioris. |

Pars altera :

- | | |
|--|---|
| 1. <i>s. u. a. c. t. a. p. a. q. i.</i>
<i>a. e. d. c. p. e. o. i. s. t.</i>
<i>i. c. c. d. s. a. a. q. h. i.</i>
<i>a. a; e. e. h. c. ae. i. a.</i>
<i>c. c. a. a; h. i. p. a. p. d.</i>
<i>d. t. c. i. i. h. p.</i> | Si, ut axis catenae totius ad partem axis, quae inter applicatam ex dato catenae puncto et verticem, ita sit tangens in capite catenae, demta sua applicata, ad aliam, quae huic ipsi applicatae addatur; et ex his compositae aequalis inclinetur a capite catenae ad axem, huic inclinatae parallela a puncto dato ducta, tanget curvam in ipso hoc puncto. |
| 2. <i>u. t. i. c. c, d. a., e. a. a,</i>
<i>i, s. a. d. c. l.</i> | Ut tangens in capite catenae, demta applicata, est ad axem, ita subtangens ad dimidium catenae longitudinem. |

- | | |
|---|--|
| 3. <i>a. i. q. a. a. r. c. i. v.</i> | Atque ita quoque applicata ad radium curvitat ^{is} in vertice. |
| 4. <i>s. c. c. e. c. r. c. a. ae. e.</i>
<i>c. c. r. e. m. p. i. d. r. c. i</i>
<i>v. e. p. a. q. i. v. e. t.</i> | Superficie ⁱ curvae conoidis ex catenae revolutione circa axem aequalis est circulus, cujus radius est medius proportion ^e inter duplum radium curvitat ^{is} in vertice et partem axis, quae inter verticem et tangentem. |
| 5. <i>u. r. e. a. e. d. i. t. e. a. a.</i>
<i>q. s. i. a. a. c. c. e. c. d.</i> | Ut rectangulum ex applicata et differentia inter tangentem et applicatam, ad quadratum subtangentis, ita axis ad curvam, cujus evolutione catena describitur. |
| 6. <i>s. c. e. p. c. e. ae. r. e. l. c.</i>
<i>d. e. c. e. s. e. e. s. r. c. i. v.</i> | Sector cui evoluta pro centro est, aequatur rectangulo, ex longitudine catenae dimidia et composita ex sextante evolutae et semisse radii curvitat ^{is} in vertice. |

§ IX.

Ad pag. 85. —

Hoc loco ante epistolam 25^{am} inserenda sunt sequentia, quae paucis verbis continent responsum Hugonii ad Leibnitii epistolam 1^o Aprilis 1691, et a nobis inter alias Hugonii ad Meyerum litteras serius inventa sunt quam ut suo loco exhiberi potuerint.

» Qu'il est vray ce qu'il dît de sa courbe, qui satisfait Que je ne le tiens plus impossible, et que je devois avoir remarqué qu'il y en a du moins 3 dans les soutangentes, dont il y en a une sans quantité connue, une autre avec une affirmative, et la troisieme avec une negative. Que je le prie d'envoyer cette lettre cy-jointe à Mrs. les Auteurs des Acta. Que je l'envoie fermée expres, croiant qu'il ne voudra pas voir mes decouvertes non plus que celles de Mr. Bernouilly, devant qu'avoir envoyé les siennes. Que, s'il les a envoiées, il verra tousjours bientost les miennes avec toutes les autres. Je ne crois pas, en considerant ce que vous m'avez mandé cy-devant, que j'aye rien trouvé que vous n'ayez de meme.

Mr. Fatio veut bien maintenant que l'échange se fasse de la methode contre la vostre, dont vous vous servez au cas, qu'il y a des racines composées dans la soutangente donnée. De sorte qu'il ne tiendra qu'à vous que le traité ne s'execute, duquel je seray garand, et vous feray avoir sa methode, qui en verité est fort belle, si tost que j'auray receu la vostre. Je vous prie d'estre clair en ce que vous nous donnerez, sans supposer que nous entendions votre *calculus differentialis*.

Je ne vois point qu'on puisse accorder sa prop. pag. 105 à Mr.

Newton, parce que ne considerant aucunement la nature de ce qu'il appelle ovale, mais seulement, que c'est une ligne fermée tout au tour, il n'exclut pas mesme une figure quarrée ou triangulaire.

Je suis fâché de son incommodité aux yeux. Que j'ay senti depuis hier quelque douleur à l'un des miens.

Que j'ay vu autrefois le traité de Hook touchant le ressort, et que j'y ay remarqué quelque paralogisme que j'ay parmi mes papiers. L'experience principale qu'on a faite est que, lorsque les forces dont un ressort comprimé sont accrues d'accessions égales, aussi les espaces de son etendue diminuent par des espaces égaux. Ce que l'on voit assez precisement observé quand les compressions sont legeres, et ne violentent pas le ressort jusqu'au bout; mais dans le ressort de l'air la proportion reussit toujours parfaitement, dont il y a des experiences dans les livres de Mr. Boyle.

Pour ce qui est de la declinaison de l'aiguille aymantée; ce qui me persuade plus qu'autre chose qu'on n'y scauroit trouver de regle, c'est que je scay qu'il y en a eu, qui s'en sont enquis par beaucoup d'experiences, esperant de parvenir par là au secret des longitudes, mais sans succes.

J'ay escrit à mon frere touchant la recherche des archives que vous demandez, quoyque je doute s'il trouvera des gens qui veuillent se donner la peine parmy cette matiere naturellement assez paresseuse. »

§ X.

Ad pag. 107 sq. verba: *J'ay la demonstration de ma regle, cet.*

Demonstratio regulæ, qua Hugenus usus est ad inveniendam summam secantium ad angulos crescentes uno gradu, vel gradu dimidio, vel 4^a. parte, vel 8^a, vel 16^a, cet., in Advers. Lib. G. pag. 26. his verbis descripta est.

➤ Summa secantium ad singulos gradus superat summam totidem
 secantium ad angulos dimidio gradu minores paulo plus quam di-
 midia CD , (fig. 35) qua maxima priorum secantium superat ra-
 dium; cum omnes differentiolae secantium de sunt paulo plus quam
 dimidium differentiarum oe , quae simul faciunt DC totam. Ergo
 si duplicetur summa secantium ad singulos gradus, et a producto
 auferatur tantum dimidia differentia CD , habebimus pauxillo plus
 quam summam secantium ad singulos semi-gradus. Quod si jam
 rursus duplicemus hanc summam, et a producto auferamus dimidiam
 DC , habebimus proxime, et pauxillo plus quam summam secantium
 ad singulos graduum quadrantes. Et rursus, si hanc summam du-
 plicemus et a producto auferamus dimidiam DC , habebimus sum-
 mam proxime majorem secantium ad singulos graduum octantes.
 Atque ita porro.

Sit summa secantium ad singulos gradus $= s$, dimidia DC $= d$,
 ergo secunda summa $= 2s - d$ secantium ad $\frac{1}{2}$ gradus
 et tertia $= 4s - 3d$ „ „ $\frac{1}{4}$ „
 et quarto $= 8s - 7d$ „ „ $\frac{1}{8}$ „
 et quinta $= 16s - 15d$ „ „ $\frac{1}{16}$ „ } verâ major.
 atque ita porro.

Sed

Sed quia semper tantum unam d amplius auferendo, oritur $s-d$ multiplex per numerum competentem progressionis 1, 2, 4, 8, 16 etc. $+d$, d autem infinite parvum fit respectu multiplicis s ; hinc patet multiplicem $s-d$, seu $ms-md$, tandem accipi posse pro $ms-md+d$ (m numerus seriei 1, 2, 4, 8, 16, etc.). Itaque si velim comparare primum summam secantium ad gradus integros, cum summa totidem radiorum, erit earum ratio ut s ad nr , (ponendo s = summae, r = radio, n = numero graduum in arcu proposito.) At si velim comparare summam secantium ad infinite parvas particulas graduum, cum summa totidem radiorum, earum ratio erit proxime quae $ms-md$ ad nmr , hoc est quae $s-d$ an nr , cum alioqui ratio ista esset ut s ad nr .

Itaque cum ad arcum 45° summa secantium ad gradus singulos seu s , sit inventa 507081503 ad datum radium 10000000, et totidem radii faciant $450000000 = nr$, d autem seu $\frac{1}{2}$ DC tunc sit 2071068; si ab s auferatur haec d , fiet 505010435, quae ad 450000000 proxime maiorem rationem habebunt, quam summa secantium crescentium cum minimis particulis graduum usque ad 45 gradus ad summam totidem radiorum.

Sed adhuc propius accedemus, si sit s summa secantium ad singulos dimidios gradus, quam invenimus additione ex tab. sinuum esse 1012061091, tunc enim $n = 90$, et $nr = 90000000$, et $s-d = 100999023$. Eritque ratio summae secantium ad minimas particulas graduum ad summam totidem radiorum proxime major ut 100999023 ad 900000000, hoc est ut 504995012 ad 450000000.

§ XI.

Ad pag. 109 verba: *touchant vostre essrit.*

Scriptio, quam hic commemorat Hugenius, continet Leibnitii *methodum tangentium inversam*, cujus in superioribus litteris saepius mentio facta fuerat, et quae nunc ad Hugenium mittebatur ea conditione, ut hic Fatii methodum cum illo communicaret. Quis autem harum methodorum permutandarum exitus fuerit, e sequentibus epistolis, in Fasc. I. occurrentibus, manifestum est. Cum vero ipsa Leibnitii scriptio a Hugenio nobis servata sit, eam hoc loco describere visum fuit, tum quoniam de hoc argumento nihil a Leibnitio publici factum est juris, tum ut opportunitas esset hanc methodum cum illa comparandi, quam Hugenius a Fatio acceperat, et in ep. ad Hospitalium (Fasc. I. p. 269 sqq.) dilucide explicuit.

Methodus, qua innumerarum linearum constructio ex data proprietate tangentium, seu aequatio inter abscissam et ordinatam ex dato valore subtangentialis, exhibetur.

Ex omnibus, quae nobis inquirenda restant in Geometria, nihil est majoris momenti, quam *methodus tangentium inversa*, seu data tangentium lineae curvae proprietate, ipsam lineae constructionem posse invenire. Nam in applicatione Geometriae ad Physicam saepissime contingit, ut linea ex tangentium proprietate noscatur, unde constructio ejus aliaeque proprietates investigari debent. Datur autem constructio lineae, quoties datur aequatio exprimens relationem inter AB abscissam (fig. 36) in directrice inde a puncto fixo A, et BG ordinatim applicatam, normalem ad directricem; ita enim cuicunque puncto rectae directricis B assignari potest respondens punctum curvae GG.

Porro data proprietate tangentium lineae curvae quaesitae, solet dari vel haberi aequatio exprimens relationem inter BT subtangentialem et AB vel BG abscissam vel ordinatam, aut ambas simul. Vocemus autem *subtangentialem* ipsam BT, partem axis cadentem inter ordinatam BG et tangentem GT. Itaque, si AB vocetur x et BG y , et BT t , res redibit ad aequationem, quam ex indeterminatis solae ingredientur x , y , t . Quo facto, quaeritur aequatio, quam, sublata t , duae tantum indeterminatae x et y ingrediantur. Ita ex data proprietate tangentium habebitur curvae constructio.

Ex aequationibus autem illis, quae exprimunt relationem ipsius t ad reliquas, eligamus illas simpliciores, in quibus valor ipsius t per x et y habetur pure; ut si sit $t = aa : x$, vel $t = ax : y$, vel $t = y \sqrt{(aa - xx)}$; vel $t = yy \sqrt{(aa - xx)} : ax$, aliisque modis infinitis. Itaque id nunc agitur ut ex dato valore subtangentialis per abscissam, vel ordinatam, vel ambas, detur aequatio exprimens relationem inter ordinatam et abscissam.

Habeo autem diversas vias, quibus magnum hoc problema in oblatis casibus aggredior. Sed hanc optimam esse judico, (quoties ea uti licet) ut problema tangentium inversum revocetur ad quadraturas. Analysis enim duorum est generum, una per saltum, cum problema propositum resolvimus ad prima usque postulata; altera per gradus, cum problema propositum reducimus ad aliud facilius. Et quia saepe fit, ut prior methodus prolixis nimis calculis indigeat, confugiendum est non raro ad secundam; tametsi enim prior sit absolutior nec aliis indigeat praecognitis, commodior tamen est posterior, quia laborem minuit, jam inventis utendo.

Ut vero intelligatur quomodo persaepe problema tangentium inversum ad quadraturas revocari nullo negotio possit, dicendum est aliquid de quodam calculi genere a me introducto, notisque novis in eo adhibitis; ita enim efficio, ut multa primo obtutu appareant,

et ipso calculi lusu nascentur, quae alias vi ingenii aut labore imaginationis assequi necesse est. Nec aliam ego causam video, cur cl. Fatius, qui jam dudum praeclari ingenii specimina nobis dedit, haeserit ubi irrationales subtangentialis valorem ingrediuntur, velut in casu per celeberrimum Hugenum mihi proposito, ubi $t = y y \sqrt{(aa + xx)} : ax$, quam quod hujusmodi expressio non aequae calculo analytico apta est, ac mea, per quam ipsius t relatio ad y et x aliquo modo generali exprimitur. Ita enim judico, cum mens humana ad cogitandum notis indigeat, eo posse nos ratiocinari melius, quo magis notae ipsae exprimunt rerum relationes.

Consideravi igitur tam abscissas quam ordinatas habere elementa quaedam momentanea, seu differentias indefinite parvas; et elementum abscissae esse ad elementum ordinatae, ut subtangentialis ad ordinatam. Nam si cogitemus punctum mobile B ex fixo A egrediens percurrere axem AB (B), et adeo abscissas AB nihil aliud esse quam distantias puncti B mobilis a puncto fixo A , patet incrementa abscissarum momentanea $B(B)$ esse ut velocitates, quas punctum B in quovis axis loco, aut quovis temporis momento, habet, adeoque inassignabilis parvitatibus, et similiter se rem habere cum ipsis GL incrementis ordinatarum, seu excessu ordinatae (B) (G) super proxime (id est inassignabili intervallo) praecedentem BG .

Haec incrementa, aut (si contrarium motum fingas) decrements, vel, ut generalius loquamur, elementa ordinatarum vel abscissarum, aut (si malis) differentias inassignabiles (quarum tamen ad alteras omnino assignabilis est ratio) notis designare volui, exprimentibus relationem ad id cuius sunt differentiae; itaque, quia abscissas AB vocavimus x , et ordinatas BC y , elementa abscissarum seu differentias minimas $B(B)$ vocabimus dx ; et elementa ordinatarum seu differentias minimas GL vocabimus dy . Possemus ipsas dx vel dy peculiaribus exprimere literis, ut e, v , vel ut lubet, sed ita

non appareret relatio ad x et y , quae tamen ipsis notis expressa plurimum juvat, modumque dedit mihi curvas transcendentes exprimendi per aequationes finitas, non alias adhibendo indefinitas quam x et y et harum affectiones, inter quas non tantum potentias aut (his reciprocis) radices, ut x^2 ; $\sqrt{x}$, etc. sed et differentias et (his reciprocas) summas refero, harumque notas ad supplendum calculum promovendamque ad transcendentes Analysin omnino aptas judico. Et quemadmodum non optime faceret qui pro x^2 , x^3 etc., semper vellet adhibere literas e , v , ad evitandum hoc notationis genus, licet admoneret se per e et v quadratum aut cubum intelligere, ita similiter praestat saepe dx aut ddx (differentiam, aut differentiam differentiarum ipsarum x) adhibere, quam pro ipsis uti literis e aut v vel similibus. Sic cycloidem exprimo per hanc aequationem $y = \sqrt{(2x - xx)} + \int (dx : \sqrt{(2x - xx)})$, posito radium circuli generatoris esse 1, et x esse abscissam in axe inde a vertice, et y esse ordinatam ad axem, et dx esse incrementa abscissarum, et $\int (dx : \sqrt{(2x - xx)})$ esse summam omnium $dx : \sqrt{(2x - xx)}$, seu quantitatem, cujus differentialis est ad differentialem abscissae, ut radius ad sinum, quae summa vel quantitas revera est arcus. Et hinc facillimo calculo sine ullo figurae respectu derivatur proprietas tangentium cycloidis nota, quae nostro modo expressa ita habet, $dx : dy = \sqrt{2x - xx} : 2 - x$. Caeteraque omnia circa cycloidem inventa pluraque alia similiter ex tali calculo analytice derivantur.

Sed ut nostrum institutum prosequamur. Producat^{ur} (B)(G) dum tangenti TG itidem productae occurrat in E, constat puncta (G) et E haberi posse pro coincidentibus, seu rectam (G) G, quae jungat duo curvae puncta inassignabiliter distantia, productam esse ipsam curvae tangentem. Cum dudum ab aliis explicatum sit, rectam, quae curvam secat, in duobus punctis, transire in tangentem eo casu, quo duo sectionis puncta coincidunt. Itaque

E L non minus quam (G) L poterit vocari dy , et, ob triangu-
 TBG et GLE similia, fiet TB ad BG, ut GL ad LE, seu $t:y$
 $=dx:dy$, idque ipsum est quod diximus, subtangentialem t esse
 ad ordinatam y , ut dx elementum abscissae ad dy elementum
 ordinatae, et quia proinde $t:y=dx:dy$, fiet $t=y dx:dy$, qui
 est generalis valor subtangentialis. Et hunc conjungendo cum
 speciali valore, quem natura problematis offert, pervenitur ad
 aequationem differentialem, quam ubi convertere licet in sum-
 matricem puram, habetur reductio problematis tangentium inversi
 ad quadraturas.

Quae reductio ut intelligatur melius, ostendam (quod momenti
 est maximi): *quandocunque proprietas tangentium data exhibet
 valorem subtangentialis per solam (ex indeterminatis) abscissam
 vel per solam ordinatam, problema reducitur ad quadraturas.*
 Ponamus enim t dari par x , utique quia $t=y dx:dy$, fiet $dy:y$
 $=dx:t$, adeoque $\int dy:y = \int dx:t$. Jam $\int dy:y$ pendet ex
 quadratura hyperbolae, et $\int dx:t$ etiam pendet ex aliqua qua-
 dratura, ejus nempe figurae, cujus ordinata est $1:t$, posito
 nempe pro t poni ejus valorem per x . Itaque res reducta est ad
 quadraturas. Exempli causa, si esset $t=1:x$, fieret $\int dy:y = \int x dx$
 $=\frac{1}{2}x^2$; et ita curva proposita habetur ex quadratura hyperbolae.
 Si esset $t=1:\sqrt{1-xx}$, fieret $\int dy:y = \int (dx \sqrt{1-xx})$, atque
 ita curva quaesita haberetur ex supposita quadratura tam circuli
 quam hyperbolae.

Similiter si t detur per y , quia $t=y dx:dy$, fiet $dx=dy.t:y$
 adeoque $x=\int dy.t:y$. Quod si jam ex problemate detur valor
 ipsius t per y , intelligi poterit cujusnam figurae quadratura sit opus:
 nam ponamus esse $t=y$, fiet $x=\int dy$ id est $x=y$, et linea
 quaesita est recta. Si sit $t=yy$, fiet $x=\int dy:y$, seu $x=yy:2$,
 et linea quaesita est parabola. Si $t=y^3$, fiet $x=\int dy.yy$; seu

$x=y:3$ et linea est parabola cubica. Si t sit constans, verb. gr. si $t=1$, fiet $x=\int dy:y$, adeoque linea quaesita pendet ex quadratura hyperbolae. Si t sit irrationalis, res itidem procedet, nam si ponatur $t=y\sqrt{1-yy}$, fiet $x=\int dy\sqrt{1-yy}$, adeoque linea quaesita pendet ex quadratura circuli.

Sed si valor ipsius t detur per x et y simul, tunc non semper facile est problema reducere ad quadraturas. Infiniti tamen sunt casus ubi res procedit. Et generaliter hoc pronuntiari potest: *quandocunque valor subtangentialis t est productum ex duabus quantitativibus seu formulis, quarum una datur per solam (indeterminatarum) abscissam x , altera per solam (indeterminatarum) ordinatam y , tunc problema reducitur ad quadraturas.* Exempli causa. Si sit $t=xy$, seu factum ex x in y ; fiet $xy=y dx:dy$, seu $dy=dx:x$, seu $y=\int dx:x$, quod pendet ex quadratura hyperbolae. Si sit $t=y:x$ seu factum ex y in $1:x$, fiet $y:x=y dx:dy$, seu $dy=xdx$, seu $y=\int x dx$, seu $y=xx:2$, quae est aequatio ad parabolam. Si sit $t=x:y$ seu factum ex x in $1:y$, fiet $x:y=y dx:dy$, seu $x dy=yy dx$ seu $dy:yy=dx:x$, seu $\int dy:yy=\int dx:x$, quae datur ex quadratura hyperbolae, nam $\int dy:yy$ datur absolute, nihil aliud enim est quam quadratura hyperboloidis secundi gradus. Sic si $t=y:\sqrt{1-xx}$, seu factum ex y in $1:\sqrt{1-xx}$, fiet $y:\sqrt{1-xx}=y dx:dy$, seu fiet $dy=dx\sqrt{1-xx}$, seu $y=\int dx\sqrt{1-xx}$, quae pendet ex quadratura circuli.

Ad hanc jam classem revocatur et curva mihi proposita, cujus subtangentialis rectae valor praescriptus erat $t=yy\sqrt{aa-xx}:ax$. (1) Nam quia semper est $t=y dx:dy$ (2) fiet $y\sqrt{aa-xx}:ax=dx:dy$ (3) per (1) et (2). Sit $a=1$ (4). Ergo ex (3) et (4) fiet $y dy=xdx:\sqrt{1-xx}$. (5) et aequationem (5) utrinque summando, quia $\int y dy=yy:2$ (6) fiet per (5) et (6) $yy:2$

$= \int x dx : \sqrt{1 - xx}$ (7). Id est, opus est tantum ut reperiatur quadratura generalis, seu indefinita, figurae cujus ordinata est $x : \sqrt{1 - xx}$, abscissa existente x . Haec autem quadratura habetur absolute. Nimirum $x : \sqrt{1 - xx}$ vocetur Q (8). Jam centro A (fig. 37) radio AK, qui sit α vel 1, describatur circulus, in cujus circumferentia sumto arcu NC, et x seu AB sumta in normali ad AK, quae sit arcus sinui aequalis, jungatur radius AC et tangens arcus CF, ipsi AK productae occurrens in F, erit Q. Nam ob triacula similia CBA, et ACF, fiet Q seu FC ad AC seu 1, ut AB seu x ad BC seu $\sqrt{1 - xx}$; unde Q seu FC est $x : \sqrt{1 - xx}$, ut jubet aequatio (8). Si ergo FC translata in BH ordinatim applicetur ad AB angulo recto, ut fiat linea curva AHH, habebitur figura ABHA, per cujus quadraturam reperietur quaesita y .

Porro ex C in AK agatur normalis CM, ajo rectangulum MKA aequari trilineo ABHA, adeoque infinitum spatium AN etc. HA aequari quadrato radii. Quod sic ostendo. Per punctum Q in CF indefinite vicinum ipsi C, agatur in CM et AB normalis QPR et alia $Q\beta$ normalis ad AK; et MC producat in S, ut sit MS aequ. AK radio; et, ob triacula CPQ et ACF similia, et $AC : CF :: CP : PQ$, seu AC in PQ = CF in CP. Jam est AC in PQ = SM in $M\beta$, et CF in CP = HB in BR; ergo SM in $M\beta$ = HB in BR, adeoque et summa omnium rectangulorum SM in $M\beta$, id est rectang. SMK aequatur summae omnium rectangulorum HB in BR, seu areae ABHA, quod asserebatur. Habetur ergo quadratura proposita.

Hinc jam constructionem lineae quaesitae ita ducemus. Area ABHA seu $\int x dx : \sqrt{1 - xx} = \text{rect. SMK}$ seu $1 - \sqrt{1 - xx}$ (9) Ergo ex aeq. (7) per (9) fit $yy : 2 = 1 - \sqrt{1 - xx}$ (10), quae aequatio est ad curvam quaesitam. Unde si tollamus irrationalitatem, fiet $y^4 : 4 - yy + 1 = 1 - xx$, et ad supplendos gradus ex lege
homogeneorum,

homogeneorum, pro 1 restituendo a , fiet $y^4 = 4 a a y y - 4 a a x x$. (12). Constructio autem erit talis. Inter duplam MK et radium AK sumatur media proportionalis, quae erit y quaesita (ex aeq. 10) eique aequalis BG ordinatim applicata ad AB angulo recto dabit curvam AGV quaesitam, cujus ultima ordinata NV aequabitur rectae KN seu lateri quadrati circulo inscripti. Et in hac linea, si sit AB x , et BG y , et AN a , tunc subtangentialis BT , seu t , erit $y y \sqrt{(a a - x x)} : a x$, ut desiderabatur.

§ XII.

Ad pag. 119 verba: *J'ay bien fait à ce que je vois etc.*

Cum in epistolarum commercio, quod inter Hugenum et Nicolaum Fatium de Duilliers locum habuit, plura occurrant et scitu dignissima et cum argumento, a Leibnitio, Hugenio et Marchione Hospitalio tractato, methodo sc. tangentium inversa, conjuncta, eas, quae inter MSS. Hugeniana exstant epistolae, cum Fatii tum Hugonii, hic inserendas esse putavimus, quo nempe uno sub conspectu exhiberemus, quae tam arcto nexu inter se cohaerent. At prius monendum est, nos tres Fatii epistolas non una cum reliquis descripsisse, quoniam quae iis continentur, hac cura minus digna videbantur. Harum enim prior scripta Roterodami 3^o. Maji 1687, cum in Angliam proficisceretur Fatius, eum in finem missa est, ut Hugenum de Patris sui obitu consolaretur. Alteram vero 7^a. Jul. 1690, v. s. et tertiam 7^a. Aug. 1690, scripsit Fatius Ultrajecti, tum ut Hugenio suum ex Anglia reditum, magnumque, quo flagrabat, eum visitandi desiderium significaret, tum ut ipsum certiore redderet se, quominus huic desiderio satisfaceret impediri, cum curae suae commissi essent duo juvenes Angli, qui adeo, ut sui juris esset, ipsi non permitterent. — Denique animadvertendum est tres Hugonii ad Fatium epistolas, quae in nostra collectione non extant, editas fuisse in diario: *Bibl. Univ.* Avr. 1822. Hae autem sunt responsoriae ad nonnullas earum, quas jam sumus exhibituri.

Chr. Hugentii et Nicolai F. de Duilliers epistolae mutuae.

A Mr. Huygens.

A Londres ce $\frac{14}{24}$ Juin 1687.

J'ai sçu de Mr. Boile que vôtre santé étoit bien retablie et même que vous aviez repris vos études. Celui, de qui nous avons ces bonnes nouvelles, étoit venu depuis peu de Hollande. Je croi qu'il est déjà parti pour y retourner, mais comme je ne l'ai pas vu, je n'ai point pu profiter de son départ pour vous dire des nouvelles de l'Angleterre. Je me suis déjà trouvé trois fois à la Société Royale, où j'ai entendu proposer tantôt d'assez bonnes choses et tantôt d'assez mediocres. Quelques uns de ces Messieurs, qui la composent, sont extrêmement prévenus en faveur d'un livre de Mr. Newton, qui s'imprime presentement et qui se débitera dans trois semaines d'ici. Ils m'ont reproché que j'étois trop Cartesien, et m'ont fait entendre que, depuis les meditations de leur auteur, toute la physique étoit bien changée. Il traite en general de la Mechanique des Cieux; de la maniere dont les mouvemens circulaires, qui se font dans un milieu liquide se communiquent à tout le milieu; de la pesanteur; et d'une force, qu'il suppose dans toutes les planetes pour s'attirer les unes les autres. Il démontre ce que vous avez trouvé touchant la cycloide et les pendules, et il determine des epicycloides qu'il faut lui substituer si on suppose que le centre de la terre soit fort voisin. Il donne le moien de décrire une surface d'un verre, qui serve, avec une autre surface donnée, pour rassembler les rayons qui partent d'un point donné precisement en un autre point. Sa methode concourt avec la vôtre pour la construction, car il se trouve que tous les rayons emploient un temps égal pour venir d'un point à l'autre, mais ses demonstrations dependent de tout un autre prin-

cipe. Il avance cette proposition, que la resistance, que sent un globe, qui se meut dans un liquide, n'est que la moitié de celle que ressentiroit un grand cercle de ce globe, qui se mouvroit suivant son axe avec la même vitesse. Ce traité, que j'ai vu en partie, est asseurement tres beau et rempli d'un grand nombre de belles propositions, mais je souhaitterois, Mr., que l'auteur vous eut un peu consulté sur ce principe d'attraction, qu'il suppose entre les corps célestes. On m'a dit qu'il expliquoit assez bien par là le flux et le reflux de la mer, savoir en supposant que la terre et la lune s'attirent l'une l'autre. J'avois déjà remarqué en Hollande que l'on pouvoit rendre des raisons assez probables du flux et du reflux en supposant votre explication de la pesanteur, et en imaginant qu'il y a une cause semblable, qui produit une pesanteur dans la lune. Car il resulte de là qu'effectivement la terre et la lune s'attirent un peu l'une l'autre, et que nous devons avoir la haute mer quand la lune est au meridien, ou plutot, comme il paroît par les observations, deux ou trois heures après qu'elle l'a passée. Vous vous souvenez Mr. de la méthode algebraïque, dont je me servois pour determiner les tangentes des lignes courbes, dont l'équation est donnée. Comme cette methode est veritable, elle concourt entiere avec la vôtre, mais elle a ceci de commode pour moi qu'elle depend d'une reflexion fort simple et fort facile à retenir. C'est ce qui me fit resoudre il y a quelque temps à la mettre au net, et à en faire quelque usage. Pendant que je me suis occupé à cela, je me suis attaché en meme temps à resoudre cet autre probleme: la propriété des tangentes d'une courbe étant donnée, trouver l'équation de la courbe. J'ai trouvé en quelque sorte le moien de le resoudre toutes les fois qu'il est possible, et de reconnoitre quand la courbe proposée n'est pas geometrique. Veritablement j'ai besoin que les propriétés des tangentes soient exprimées par la proportion qui se

trouve entre deux lignes particulieres paralleles à des lignes données; mais c'est ce qui est toujours assez facile. Voicy des exemples de quelques uns de mes calculs.

Le point A (fig. 38) et les x , y , étant donnez de position, trouver l'équation de la ligne courbe, qui passe par A et dont les tangentes, comme B A C, ont toutes cette propriété, que la ligne A D, parallele à x , est à D C, parallele à y , comme x est à $\frac{2}{3} y$. Je fai mon calcul comme il suit: (¹)

$$\begin{aligned} z . u &:: x . \frac{2}{3} y \\ 3 u x - 2 x y &= 0 \\ + 3 &\quad - 2 . \end{aligned}$$

$\frac{y^3}{x^2}$ doit toujours être égal à une meme grandeur, par exemple à g . Car g est donnée, à cause que x et y sont donnez pour un cas, ce qui suffit.

Donc l'équation cherchée est $y^3 - g x^2 = 0$.

Si j'avois $z . u :: b - y . x - c$, mon calcul devoit etre comme il suit:

$$\begin{aligned} + x x - z c - b u + u y &= 0 \\ + \frac{1}{2} x^2 - c x - b y + \frac{1}{2} y y &= g g , \text{ équation cherchée.} \end{aligned}$$

Si j'avois $z . u :: b - y + 2 x . x - c + 6 y$

$$\begin{aligned} + x x - c x + 6 y x - b u + y u - 2 x u &= 0 \dots\dots (A) \\ + \frac{1}{2} x^2 - c x &\quad - b y + \frac{1}{2} y^2 \quad \text{partie des termes de l'équation} \\ &\quad \text{cherchée.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\quad + 6 \quad \quad \quad - 2 \\ + 6 . - 2 &:: + 3 . - 1 \text{ en divisant les premiers termes par 2.} \end{aligned}$$

(¹) In hoc et seqq. exemplis x idem est quod dx et u idem quod dy ; ita ut $x . u :: x . \frac{2}{3} y$ proprie sit $dx : dy = x : \frac{2}{3} y$, et sic in reliquis. Ut quae Fatius h. l. scripsit bene intelligantur, conferenda erit explicatio ejus regulae quam dedit Hugonius et quae invenitur Fasc. I. p. 269 sqq.

$+\frac{2x^3}{y}$; si ce terme-ci étoit dans l'équation cherchée, il donneroit

dans l'équation (A) les termes $+\frac{6xxx}{y}-\frac{2x^3u}{yy}$, qui sont entre eux comme $6yz$ à $-2xu$, au lieu qu'il devrait donner les termes même $6yz-2xu$, à cause des autres termes de l'équation (A), qui ont déjà leurs correspondans. Donc il n'y a point de ligne courbe geometrique, de qui les tangentes aient la propriété proposée.

Le chevalier Gordon a trouvé une construction de pompe pour les vaisseaux qui fait un effet prodigieux.

Si vous êtes encore dans le dessein Mr. de me donner un exemplaire du traité de la pendule, je vous prie de le remettre à celui qui vous fera tenir cette lettre. Je suis etc.

A Mr. de Duilliers a Londres. (¹) 11 Juill. 1687.

Mr. Sa lettre de Rotterdam recue je n'ay pas fait de reponse faute de scavoir son adresse.

Je souhaite de voir le livre de Newton. Je veux bien qu'il ne soit pas Cartesien, pourveu qu'il ne nous fasse pas des suppositions, comme celle de l'attraction.

Cela me paroist assez etrange que les rayons employent un tems egal, et qu'il ait pourtant un autre principe. La proposition du globe assez paradoxé, j'en voudrois voir la demonstration.

Je m' imagine à peu près de quelle façon vous voudrez expliquer le reflux suivant ma theorie de la pesanteur ; cependant il me reste quelque doute touchant les deux reciprocatons en 24 heures.

Ce que vous dites de votre invention pour trouver les lignes

(¹) Exstat hoc responsum in libro K. p. 388.

courbes , par la propriété de la tangente , est de plus grande discussion , et qui seroit mal saine par le grand chaud qu'il fait.

Je ne sçais pas bien ce que vous appelez ma methode des tangentes. Si c'est celle qui estoit parmy les papiers dont vous avez pris la peine de me faire des copies , je ne me souviens plus de la vertu que vous dites convenir avec elles.

Elle m'aideroit peut-estre à entendre ce que vous m'expliquez en abrégé de vostre nouvelle invention , qui sera belle , si elle est applicable à toutes les courbes geometriques , quand mesme ces dernieres du genre de celle de Mr. Leibnitz n'y seroient point comprises.

Quel effet prodigieux peut faire la pompe de Mr. le Chevalier Gordon ? S'il a esté le frottement et toute superfluité de mouvement ? Vous scavez que c'est tout ce qu'on peut faire , et que le poids de l'eau reste toujours à eslever.

Mr. de Tschirnhaus ayant veu vos remarques , s'est hasté d'y faire une reponce , que son correspondant d'Amsterdam m'a envoyé , mais comme elle ne vaut rien , je lui ay conseillé de ne la pas faire imprimer , comme l'auteur avoit ordonné , et cela pour son honneur. Il ne s'est pas donné le temps d'examiner vos raisons ni demonstrations , et pretend que les courbes à deux foyers , que vous proposez , ne sont pas. Mes respects à Mr. Boyle. Ayons le livre de Newton,

A Mr. Huguens.

A Londres ce $\frac{28 \text{ Avril}}{9 \text{ May}}$ 1688.

Mr. J'espere que vous aurez receu une longue lettre que je vous ecrivis d'Oxford , il y a quelques mois , et que j'avois envoyée à un de mes amis en Hollande pour vous la faire tenir. Vous m'obligerez sensiblement Mr. , si vous voulez bien me dire en deux mots votre pensée touchant les choses que vous y aurez vues. Je me

suis engagé en quelque maniere à rester encore un an en Angleterre. Un de mes amis envoie son fils dans ma chambre pendant quelques heures du jour seulement, et là je pren soin de l'instruire dans quelques sciences que j'ai étudiées. Le parti que l'on me fait est une pension à vie, proportionnée au temps que j'aurai eu soin de l'éducation du jeune homme; et ce parti quoiqu'insuffisant au bout d'un an pour m'entretenir le reste de mes jours, si du moins je dois encore vivre si longtems, est cependant capable de me tirer d'une extreme misere, en cas que je ne pûsse rien esperer de ma famille. Je le préfère a mille écus de monnaie de France si on me les vouloit donner en argent contant. Ce que j'ai fait a été du consentement de Mr. Boyle et en quelque maniere par ses conseils. Je scai bien Mr. que l'emploi dont on vous avoit parlé en Hollande m'auroit été plus glorieux: mais outre que j'aime à etre retiré, et que les fruits de celui-ci s'étendent aussi loin que ma vie, sans aucun embarras de ma part, que pendant quelque temps, je croi que je pourrois aussi bien faire mes poursuites à la Haie dans un an ou deux d'ici que dez à présent. Du moins Mr. je scai bien que cet emploi là ne sera rempli que de vôte consentement, et que vous pourriez toujours me le conserver ou meme me le procurer.

Je vous envoie Mr. avec cette lettre un livre, dont le Docteur Bernard vous fait present; vous y verrez quelque chose que j'ai écrit touchant la mer d'airain de Salomon. Vous jugerez Mr. si mon stile latin qui n'est pas tout a fait tant embrouillé que vous le trouvâtes en Hollande, vous paroitroit supportable dans le traducteur de votre Dioptrique. Si vous en étiez en quelque maniere content, j'entreprendrois avec joie meme en ce pais-ci la traduction de votre manuscript, supposé que vous me le voulussiez bien confier. Monsieur Boyle me dit que la figure, que j'ai donnée de la mer d'airain de Salomon, est fort semblable à un modele de cuivre de cette mer,

qui

qui est gardé dans la synagogue d'Amsterdam. Vous m'obligerez Mr. si vous voulez bien m'éclaircir touchant ce fait là. Je n'ai point vu le modele qu'on garde dans la synagogue, et si j'en avois seulement oui parler, je n'aurois eu garde de faire rien imprimer sur ce sujet. Sans doute que Mr. le Docteur Burnet est en bonne santé. Tous les honnêtes gens s'intéressent ici beaucoup en ce qui le regarde. Je suis etc.

A Mr. Fatio. (¹)

A la Haye, ce 7 Febv. 1690.

Excuse. J'ai eu besoin de contredire à Newton. Exemplaires. J'ay envoyé ce que j'en avois de reliés. Son jugement. S'il n'a pas veu; il semble qu'ouy. Je n'ay pas voulu faire mention de la controverse que nous avons Newton et moy. Scavoir si elle avoit une asymptote ou non, quoyque je ne sois pas persuadé par sa demonstration: Exhorter pour son traité des couleurs, quand ce ne seroit que les experiences. Boyle recepte pour faire de la glace sans neige ny glace.

A Mr. Huguens.

A Londres, ce 24 Fevrier 1690.

Mr. Je vien de recevoir l'obligeante lettre que vous m'avez fait l'honneur de m'écrire. Elle a eu assez de peine à me trouver. Je n'ai encore vû que l'exemplaire de votre traité qui étoit pour Mr. Hampden. J'irai demain chez Mr. de Zulichem, où je trouverai apparemment les autres, du moins ceux qui n'ont pas encore été donnez à ces Mrs. que vous me marquez, et j'en prendrai du soin. En mon particulier Mr. je vous rends mes tres humbles graces de ce que vous avez bien voulu me mettre de leur nombre. J'ai parcourru avec un singulier plaisir votre Traité de la Lumiere, et j'ai déjà lu plu-

(¹) Exstat in libro K. p. 465.

sieurs fois celui de la pesanteur. On ne peut rien voir de plus beau que le premier de ces traittez, et ce seroit dommage assurément qu'il ne fut pas veritable. Vous avez toujours cet avantage Mr. qu'on ne pourra pretendre avoir quelque chose de meilleur, jusqu'à ce qu'on ait aussi bien expliqué les apparences du cristal d'Islande, sur lesquelles j'admire l'abondance et l'exactitude des choses que vous proposez; mais c'est ce qui se fera malaisément. Dans cette premiere lecture, qui n'a été que fort superficielle, et qui en demande encore une seconde, je n'ai rien trouvé, qui m'arrêtat, si non ce que vous dites dans la page 64, et ailleurs, que IC sera la refraction du raion RC, quoique IC ne soit pas perpendiculaire sur l'onde IK. Car il est assez particulier que IK frappe l'oeil (¹) non pas suivant les perpendiculaires à elle meme, mais suivant les paralleles à la ligne que son extremité I decrit. Cette difficulté pourra bien s'évanouir à une seconde lecture, puisqu'aussi bien il est facile de remarquer dans l'onde IK une disposition à se jeter de côté. Je voudrois pourtant Mr. que dans votre theorie on s'imaginat que les ondes de lumiere se font dans un milieu fort rare et dont les parties sont fort écartées entre elles, à peu prez comme les ondulations du son se font dans l'air. Quelque vitesse qui resulte de là dans les parties de l'ether, elle ne me paroitra jamais excessive. Si je conçois bien un mouvement 600,000 fois plus lent que celui du son, lequel mouvement se peut voir dans le bout de l'aiguille à secondes de certaines montres de poche, et si je conçois d'autres mouvemens, plus lents que celui là, qui est trop sensible, tels que sont ceux des autres aiguilles, et en particulier le mouvement annuel d'une aiguille tant soit peu moindre, lequel mouvement seroit

(¹) IC est le rayon de lumiere, mais il agira sur l'oeil comme venant suivant la perpendiculaire à l'onde IK. H.

600000 fois plus lent que celui de l'aiguille des secondes; enfin si je conçois tous les autres mouvemens possibles en descendant à l'infini jusques au parfait repos, pourquoi ne concevrois je pas aussi un mouvement 600000 fois plus prompt, que celui du son, ou meme incomparablement plus grand? Surtout la grandeur des mouvemens, qui me sont connus ne limitant point le pouvoir de la nature, et trouvant d'ailleurs entre eux une si grande disproportion. Ce n'est pas que je voulusse admettre de tels mouvemens sans nécessité; mais je croi qu'on ne peut s'empêcher de les recevoir. Et vous meme, Mr., vous verrez bien, qu'il les faut admettre, si vous vous souvenez que quand vous calculates la vitesse de la matiere, qui cause la pesanteur, vous supposâtes que la quantité de cette matiere, qui se trouve dans un espace égal à la masse solide de plomb, fût la même précisément que la quantité du plomb; parce qu'autrement votre calcul devoit être corrigé. En effet soit D la densité du plomb, et d la densité de votre matiere, qui cause la pesanteur, laquelle densité est dans la verité beaucoup moindre que la premiere. Que l'on prenne un égal volume de plomb et de votre matiere, et que les différentes parties de l'un et de l'autre tournent autour de celle de la terre; le plomb avec la vitesse u , et votre matiere avec la vitesse v . La force centrifuge du plomb sera $u^2 D$, et la force centrifuge de votre matiere $v^2 d$. Et pour faire qu'elles soient égales l'une à l'autre, ou que le plomb puisse decrire un cercle autour de la terre, il faudra que la vitesse de votre matiere soit à la vitesse du plomb, comme la racine de D à la racine de d . Par consequent si le plomb est 10000 fois plus massif que votre matiere, il faudra que la vitesse du plomb soit à la vitesse de votre matiere, comme $\sqrt{1}$ à $\sqrt{10000}$, ou comme 1 à 100. Or votre matiere ⁽¹⁾ comparée au

(1) Ma matiere n'est pas fort rare, mais bien les autres corps qu'elle traverse. H.

plomb est extrêmement rare, vû les autres matieres et les mouvemens, que l'on y peut supposer entremêlez. C'est ainsi Mr. que si votre vaisseau de la page 142, est separé en diverses parties, qui n'aient point de communication entre elles, par exemple en 4, par le moien de deux planchettes, situées selon les diametres qui coupent $k k$ par des angles de $45^d.$, et que le corps L, que je suppose de plomb, soit attaché par un fil vers le centre D, la force centrifuge de L sera peut-etre dix fois plus grande que celle de l'eau qui l'environne immédiatement, non obstant la meme vitesse du mouvement circulaire; et le fil par cette tension, pourra venir à se casser; mais si la masse du plomb n'est que 1 millionieme de l'espace qu'il occupe, comme je croi qu'on peut fort bien le supposer, et si les corps pesans pesent à proportion de leur masse, un corps tout a fait solide, en suivant les mêmes suppositions, sera 1000000 de fois plus pesant que le plomb, et 10000000000 de fois plus dense que votre matiere; et il aura la même force centrifuge, s'il tourne avec une vitesse 100000 fois moindre. Par ces deux calculs, la vitesse de votre matiere vient 100 fois ou 10000 fois plus grande que vous ne l'avez supposée, et peut être encore excède-t-elle de beaucoup ces nombres. Je vous ai quelquefois entretenu Mr., de ma theorie de la pesanteur, que j'ai dans l'esprit depuis trois ans, et que je n'ai entièrement débrouillée que depuis votre depart de Londres. Je voi bien par le tour que vous avez pris, Mr., dans vos recherches, que vous l'avez entrevû. Mais les memes raisons qui m'ont fait beaucoup d'embarras dans mon travail, pendant tout ce temps là, vous l'ont fait rejeter comme une theorie impossible. Je la deduis geometriquement d'une supposition, qu'il y ait dans tous les espaces du monde une matiere déliée, ou, si l'on veut, plusieurs ordres de telles matieres, dont les parties soient fort agitées indifferemment en tous sens. Je suppose que les parties aient leurs mouvemens en lignes

droites, fort libres, et qu'ainsi le monde ne contienne que trez peu de matiere. Et je trouve qu'il se produit autour de tous les corps grossiers une force de pesanteur, soit que ces corps soient en repos ou en mouvement, même dans des orbes circulaires ou elliptiques. Et que cette pesanteur est dans les grandes distances memes. Tout cela se deduit de la supposition que les particules de cette matiere perdent quelque chose de leur mouvement, quand elles tombent directement sur un corps grossier, et à proportion dans les autres cas. Mais ce qu'elles perdent, se retrouve quelque fois, ou dans le fremissement qu'elles conservent quelque temps apres le choc, et qui passe dans des matieres plus deliées, ou dans les mouvements circulaires qui se produisent et qui se peuvent perdre dans les memes matieres. Ce qui m'a empêché pendant si longtemps de reconnaitre que cette hypothese pourroit être la veritable, c'est, que je m'imaginai que la matiere, que je suppose, s'épaissiroit trop vers les corps grossiers, vers la terre par exemple, et que cela étoit contre la bonne philosophie. Aussi je me suis tourné de tous cotez pour eviter la force de cette objection-là, qui s'est évanouie d'elle même, quand je l'ai examinée de prez. En effet soit C (fig. 39) un globe en repos entierement solide ou du moins qui ne se laisse point traverser par notre matiere, autour duquel soit notre matiere dispersée également de toutes parts, mais en repos, et que tout d'un coup ses parties soient mises dans une grande agitation indifferemment en tous sens. Premièrement à cause de l'agitation égale de toutes parts et par consequent des chocs égaux, ce globe ne sera jamais chassé hors de sa place. Soit prise sur sa surface une particule infiniment petite ZZ, à laquelle soit menée le plan tangent AB, et de ZZ comme centre soit decrite la sphere APQBRSA. Soit cette sphere divisée en une infinité de pyramides comme PZZQ, qui sont tronquées en ZZ infiniment prez du sommet; ces pyramides

auront ainsi leurs bases convexes PQ infiniment petites ; qu'on suppose les pyramides prolongées de côté et d'autre , à l'infini. Comme je suppose que la matiere agitée en tous sens est divisée en parties extraordinairement petites , et que leur mouvement est très prompt , il y a toujours dans une pyramide comme $PZZQ$ un assez grand nombre de corpuscules , qui passent continuellement selon la longueur de la pyramide et qui vont tomber sur la petite surface ZZ . On peut distinguer dans la même pyramide et dans celles qui sont également inclinées sur ZZ diverses classes de corpuscules , selon leur grosseur , leur figure , leur vitesse , leur mouvement circulaire , leur ressort et la maniere dont se fait leur choc sur la petite surface ZZ . Ces classes étant distinguées quoiqu'elles soient toutes jointes dans la pyramide PZQ , par exemple , elles s'écarteront apres la reflexion ; chaque classe pourtant gardant toujours sa reflexion particuliere. Or dans cette reflexion il y a diverses choses qui empêchent ordinairement que la vitesse des particules apres le choc ne soit si grande qu'auparavant. Et premierement leur ressort et si l'on veut celui du corps Z n'étant pas entierement parfait avec une parfaite dureté , la reflexion diminue de la vitesse avec laquelle ils devroient s'éloigner du plan ZZ : ce qui arriveroit encore si le ressort étoit parfait et que les particules ne fussent pas parfaitement dures , mais pliantes et capables de fremissement. A cela il faut joindre le frottement que l'on peut supposer en ZZ pendant le choc. Et ce frottement donnant un mouvement circulaire aux corpuscules , qui n'avoient que le mouvement progressif , diminue par là ce dernier. Dans les cas où les particules ont déjà un mouvement circulaire , il est évident , que s'il n'est pas exactement conservé (auquel cas la reflexion se fera comme s'il n'y avoit eu que le ressort qui eut agi en Z sans frottement) il est augmenté sans comparaison plus souvent que diminué. Il est bien évident que chaque classe en particulier fait le long de sa pyra-

mide un vent ou un courant vers ZZ, dont la force est dans la meme pyramide reciproquement comme le quarré de la distance à ZZ. Et cela parce que ce courant gardant toujours la meme vitesse s'épaissit dans cette proportion. Joignez plusieurs de ces classes qui fassent dans la meme pyramide un vent ou un courant plus fort contre ZZ, et la force de ce courant sera toujours dans la meme pyramide reciproquement comme le quarré de la distance. De meme joignez plusieurs classes reflechies dans une meme pyramide, quoique venant peut-être avant la reflexion de pyramides differentes, et la force du courant qu'elles produiront, et qui s'éloignera de Z, sera dans la meme pyramide reciproquement comme le quarré de la distance. Or comme ce que je dis d'une pyramide se doit entendre de toutes, voila dans chaque pyramide deux courans opposez. Mais à tout prendre, celui qui vient de ZZ etant, par les raisons qui ont été dites, plus foibles que celui qui va contre ZZ, qui est toujours le meme dans toutes les pyramides, qui environnent ZZ, s'il en est deduit il restera un courant qui ira vers ZZ, et qui aura toujours dans la meme pyramide une force qui sera reciproquement comme le quarré de la distance. Mais dans des pyramides differentes la force de ce courant pourra etre differente, et l'on pourrait rechercher quelle elle resulteroit dans les differentes pyramides, si les corpuscules étoient des globes egaux, qui se mussent avant le choc indifferemment en tous sens, avec une égale vitesse et sans mouvement circulaire. Il faudroit neanmoins que leur ressort fut connu aussi bien que les regles de la reflexion, quand il se produit des mouvemens circulaires par le choc. A présent si l'on acheve le globe ZZ, et qu'on examine ce qui arrive sur les autres parties de sa surface, il est bien évident qu'en de grandes distances de ce globe, d'où son diametre paroitra petit, la force du courant, qui tend vers C, sera reciproquement comme le quarré de la distance

au centre , et que cette force sera uniforme tout autour du globe , d'où il paroît enfin que ce courant perpetuel vers le globe C causera dans les corps ronds homogenes et de meme grosseur comme N N , qu'il trouvera sur son chemin , si on y en suppose quelques uns , une pesanteur vers ce meme globe , qui sera dans les grandes distances reciproquement comme le carré des distances memes.

Que si le globe C , au lieu d'avoir une solidité parfaite , a beaucoup de pores et qu'il donne comme tous nos corps terrestres un passage fort libre à la matiere agitée en tous sens , le raisonnement precedent aura lieu pour les particules qui se reflechiront sur les parties exterieures Z Z du globe. Mais outre ces particules là il y en aura d'autres qui ressortiront par Z Z , apres avoir diversement traversé le globe ; quelques uns l'auront traversé sans rien rencontrer ; d'autres auront heurté dans leur chemin contre des parties interieures , et seront venues à Z Z par des chemins plus ou moins détournés. Toutes ces particules doivent etre de nouveau distinguées dans leurs classes differentes , et il faut negliger toutes celles , qui traversent le globe sans le toucher. Les autres perdent encore de leur mouvement en frappant contre les parties du globe : d'où l'on deduira comme ci-dessus que dans une meme pyramide le courant , qui vient contre Z Z , est toujours plus fort que celui qui s'en éloigne , et que par l'excez de sa force il produit une pesanteur vers Z Z , qui est dans la meme pyramide reciproquement comme le quarré de la distance. Et on trouvera encore que , dans les grandes distances , la pesanteur contre le globe se trouve être reciproquement comme les quarez de la distance au centre C. On objectera que suivant l'hypothese que je propose , le mouvement de la matiere agitée se perdra et que cette matiere s'épaissira extremement autour de C. A cela je repons diverses choses , mais principalement ce qui suit.

La

La même classe qui se ment le long d'une même pyramide, comme PZQ, se réfléchit dans une seule pyramide TZV, qui peut avoir un peu plus de largeur vers la base. (¹) Pendant un temps égal à PZ avant la réflexion, les parties réfléchies viennent par exemple de Z en $t\alpha$ seulement, au lieu de venir en TV. Mais ces parties réfléchies vont constamment avec une même vitesse en s'éloignant de Z, et font place aux autres qui leur succèdent: de sorte qu'il se fait seulement la condensation, qui se produit en réduisant la matière de TZV en $tZ\alpha$, ce qui étant une fois fait, et cela arrive presque en un moment, la nouvelle condensation demeure la même sans plus augmenter. L'espace TV $t\alpha$ s'augmente toujours et s'éloigne incessamment de C.

Je vous en dis trop Mr. dans une lettre, et trop peu pour vous donner une juste idée de mon hypothèse, qui a quelque chose de bien simple et qui paroît être beaucoup dans l'esprit de la nature, et qui respire la manière aisée dont Dieu se sert pour exécuter des choses admirables. Vous voyez aussi Mr., jusques où il peut être vrai, que les corps pesent à proportion de leur masse, sur quoi je croi que nous manquons d'expériences exactes. Mais s'ils sont composés d'un tissu fort rare, et si leurs particules sont fort rares elles mêmes, et composées d'autres particules qui soient toujours dans les différens corps terrestres d'une grosseur à peu près égale, la pesanteur ne s'éloignera pas d'être proportionnelle à la masse. Pour moi j'aime mieux avoir rendu raison de cette diminution admirable de la pesanteur, que d'avoir montré comment les corps devoient peser exactement à proportion de leur masse. C'est à vous à présent Mr., de juger si je me suis approché de la vérité, mais je ne pretens pas dans cette lettre vous dire tout ce qui appuie mes con-

(¹) Cela est impossible à considérer tout le tour de la boule C. H.

jectures. Je marquerai seulement en passant que Mr. Newton trouve que l'expérience s'accorde avec cette pensée, que dans le choc direct des corps à ressort, par exemple celui du verre, la vitesse respective avant le choc garde avec la vitesse respective après le choc une raison donnée, par exemple de 16 à 15. Mr. Newton, Mr., recevra parfaitement bien tout ce que vous avez dit. Je l'ai trouvé tant de fois prêt à corriger son livre sur des choses que je lui disois, que je n'ai pû assez admirer sa facilité, et particulièrement sur les endroits que vous attaquez. Il a quelque peine à entendre le François, mais il s'en tire pourtant avec un dictionnaire. Je ne me souviens point distinctement Mr. de ce que vous dites touchant vos copistes de Paris. Il me semble pourtant qu'ils disoient avoir fait une copie pour un autre que vous, mais c'étoit peut être par votre ordre. Ils ne m'avoient rien dit de particulier de votre explication de la lumière, dont je n'ai eu d'idées que depuis que j'ai lu votre livre. Je verrai Mr. Boyle de votre part. Il ne fait pas des morceaux de glace fort épais avec le sel armoniac, qu'il emploie, si je ne me trompe. Mais aiant mis sa matière avec de l'eau dans une bouteille, ou un grand matras, le thermometre baisse environ jusqu'au point de la gelée et plus bas; et au dehors du vaisseau, qui a été mouillé, on peut racler avec un couteau de petites écailles de glace, mais qui sont extrêmement minces. Peut-être aurai-je l'honneur de vous voir Mr. avant la fin de Juin. Cependant Mr. je vous demande pardon de l'embarras que je vous ai donné par la faute que j'ai faite de négliger de vous écrire. Soiez persuadé Mr., etc. (¹)

(¹) *Sequentia Hugeniis huic Fati epistolae subjunxit :*

Je n'ay pas dit que ce qui fait la pesanteur d'une balle de plomb est une portion de la matière fluide, enfermée dans un espace de même grandeur qu'occupe la boule de

A Mr. Fatio de Duilliers.

21 Mars 1690.

Que mon frere aura donné l'exemplaire de mon livre, qui lui estoit destiné, au Dr. Stanley. Que je lui en envoie un autre et pour Mil. Pembroke et Mr. Wren et Wallis, par une personne qui va partir avec Mil. Portland. Response à ce qui l'a arrêté au traité

plomb, mais une quantité de cette matiere fluide, dont les parties égalent en solidité et en étendue les particules coherantes qui composent le plomb, laquelle quantité de matiere fluide en faisant descendre le plomb, occupera la place que les particules de plomb occupoient. Ainsi cette mesme matiere fluide n'a pas besoin d'un mouvement circulaire plus viste, qu'il en faudroit à la balle de plomb pour peser autant en haut qu'elle pese maintenant en bas, c'est à dire d'un mouvement 17 fois plus viste, que celui d'un point de la terre sous l'equateur.

Pourquoy ce mouvement par pyramides d'une matiere, qui n'a aucune inclination vers la boule *c*, pourquoy s'iroit-elle condenser. Si après les reflexions contre *c*, les particules ont un courant plus foible que lorsqu'elles y tendent, la matiere s'accumulera continuellement auprès de *c*, ce qui est absurde. Sa reponse n'est pas bonne. La matiere doit s'eloigner aussi bien par chaque cone, qu'elle approche, partant autant de force pour eloigner les corps de la terre que pour les approcher. En general il y a necessairement autant de matiere qui s'ecarte de la terre qu'il y en a qui s'y va rendre, et la vitesse de l'une est egale à celle de l'autre, autrement elle s'accumulera de plus en plus; ainsi point de cause qui pousse plutost le corps vers elle, que qui les en ecarte.

Comment peseront les corps enfermez dans une bouteille de mesme que qui en sont dehors? Comment les parties basses d'une colonne droite contribueront autant à son poids que celles qui sont en haut? Comment ce grand courant de la matiere vers la terre? n'abatra pas une plume qui vole dans l'air?

Comment veut il que depuis la Lune il y ait des courans continuels et continus vers la terre?

Si quelques particules perdent de leur mouvement auprès de la terre *c*, il faut qu'elles les regagnent, autrement celles de cette classe seront accumulées continuellement.

Il y auroit un courant continuel et par pyramides vers la boule *c*, si la matiere; en y arrivant, fust absorbée et reduite à rien. Sans cela il faut de nécessité qu'il s'en ecarte autant qu'il en approche, et par consequent rien pour causer le pesanteur.

du cristal d'Islande; et à son objection contre la cause de la pesanteur. Absurdité de son hypothèse pour cela.

Qu'il demande la recepte pour faire de la glace sans neige à Mr. Boyle, qui me l'a promise, et une autre dont je ne me souviens point. Celle de la flame avec 2 liqueurs froides est belle, mais je ne scay s'il la voudroit communiquer.

A Mr. Huguens.

A Londres, ce 11 Avril 1690.

Mr. voici la maniere dont Mr. Boyle se sert du sel Armoniac pour produire avec l'eau commune un degré de froid, qui égale pour l'ordinaire celui de la gelée. En me la communiquant il m'a prié de vous dire qu'il souhaiterait de la tenir secrette. Il a une cucurbite de verre, où il met a peu près autant d'eau, qu'il en faut pour dissoudre environ dix onces de sel Armoniac. Les experiences enseigneront plus exactement quelle doit estre la proportion des poids du sel et de l'eau. Il jette ensuite tout d'un coup cette quantité de sel Armoniac dans l'eau, et la fait incessamment remuer avec un baton, et cela suffit pour produire un peu de glace dans des tems même où il ne gele pas, excepté pourtant en été. Le mesme sel Armoniac peut servir encore, pourvu qu'on ait soin de la bien secher, de sorte qu'il n'y reste aucune humidité. Monsieur Boyle n'a pas encore receu l'exemplaire que vous lui avez envoyé de vos derniers traitez. J'en ai averti Mr. de Zulichem, afin qu'il put s'éclaircir la-dessus avec Mr. Stanley. Pour ce qui est des liqueurs froides, dont Mr. Boyle se sert pour en produire du feu, il ne veut pas qu'on les connaisse, parce, dit il, qu'on en pourrait faire de mauvais usages. Mais on m'a dit que ce secret même avoit été imprimé au long dans les journaux de Paris, où on l'attribue, dit on, à Mr. le Docteur Stare. On m'a dit aussi d'un autre côté, qu'au lieu que Mr.

Boyle se sert d'un peu d'étoupes, ou de telle autre matiere, outre ses deux liqueurs pour en produire du feu, on avoit fait voir la même experience à la Société royale, depuis environ deux mois, mais de sorte que la flamme se produisoit sans étoupes par le seul mélange des liqueurs. — Comme vous me defendez Mr. de vous parler de ma theorie de la pesanteur, je ne tacherai pas ici de la justifier entierement, ni de repondre à toutes vos objections. Je dirai seulement Monsieur, qu'elles ne partent apparemment que de l'obscurité, qui pouvoit être dans ma dernière lettre, car elles ne me touchent pas, et vous l'auriez bien vû, si vous aviez entendu ma pensée. Je suppose que ma matiere est agitée indifferemment en tous sens, et je suis bien éloigné de croire qu'elle se meuve principalement selon les pyramides que je supposois dans ma demonstration; mais dans cette demonstration je considere l'effet d'une portion extraordinairement petite de cette matiere, et qui est précisément celle qui se meut le long des pyramides, c'est-à-dire celle, qui vient frapper contre la terre, et elle suffit pour mon dessein. Ce que vous me dites Mr., que j'ai besoin dans ma theorie de l'aneantissement de la matiere, qui vient frapper par exemple contre la terre, me suffit pour défendre ce que je vous avois écrit. Car soit C , (fig. 40) le centre d'une hyperbole équilatere $A t$, soit CAz son axe prolongé; A son sommet; CT une asymptote; Zt une ordonnée à l'axe, qui étant prolongée coupe l'asymptote en T . Si CA represente la vitesse des particules de matiere, qui venant frapper contre la terre (car, comme je l'ai dit, toutes les autres particules ne doivent point être considerées) et qui étant en même temps aneanties suffiroient pour produire la pesanteur, telle que nous la voions; je dis que la pesanteur sera la même, si TZ est la vitesse de ces mêmes parties, qui viennent choquer contre la terre, et Zt leur vitesse apres la reflexion. Or on peut prendre TZ si grande que l'on veut, et par consequent

augmentant la vitesse, la même pesanteur subsistera avec si peu que l'on voudra de perte de mouvement.

Dans ma théorie, supposant le soleil et les planètes tels qu'ils sont, c'est à dire, faciles à être pénétrés par la matière générale que cause la pesanteur, une portion si petite que l'on voudra de matière, étant suffisamment divisée et suffisamment agitée, pourra produire toutes les pesanteurs, qui sont dans notre système, et cela avec si peu que l'on voudra de perte de mouvement, et à proportion pour les étoiles fixes (¹). Dans la même théorie, qui comme vous voyez Mr. , établit le monde extraordinairement vuide de matière, supposant que les corps durs, qui n'ont point de ressort, ne rejaillissent point dans leurs chocs, (²) et qu'il n'y a point de ressort, qu'en vertu de l'agitation d'une matière dure, sans ressort et bien plus déliée que ne peuvent être les parties élastiques, il ne se perdra dans un temps immense qu'une partie si petite que l'on voudra du mouvement qui est dans le monde. Or on a sujet de soupçonner que les corps durs ne rejaillissent qu'en vertu de leur ressort, et si cela est, il me semble qu'il n'est pas possible dans d'autres suppositions que les miennes, de faire voir comment le monde s'entretient depuis si longtemps sans une perte sensible et presque totale de son mouvement.

Pour ce qui est de toutes les objections qu'on peut me faire, j'y ai une réponse générale, qui m'a souvent fait trouver la solution de quelques difficultés, qui me venoient dans l'esprit, quand je lisois des ouvrages des mathématiques; c'est que l'on peut hasarder de

(¹) Il semble qu'à la fin vous n'auriez pas besoin du globe terrestre pour produire votre pesanteur, ce qui pourtant serait fort absurde, supposé votre mouvement de matière en tous sens. H.

(²) Cela n'est point. H.

croire que je ne me suis pas trompé dans mes raisonnemens ; et quand on fera cette supposition , et qu'on la prendra comme un principe pour développer ce que je veux dire , les objections aisées à venir dans l'esprit se dissiperont d'elles mêmes avec un peu d'application. En effet il n'est pas croiable qu'ayant médité sur ce sujet depuis si longtemps , elles m'eussent échappé ; et si elles ne m'ont pas échappé , je ne suis nullement d'humeur à les dissimuler même au cas que je n'y aie pas de solides réponses. Dans cet esprit là Mr. , qui est celui où j'ai toujours été a votre égard , comme je le devois par toutes sortes de raisons , vous voyez bien Mr. , que ce que vous avez pris comme une objection à votre traité de la pesanteur dans ma première lettre , n'en étoit pas une contre vous , ce que je croi d'ailleurs avoir assez indiqué , puisque toute sa force ne vient presque que de la grande rareté de l'éther , que vous n'admettez pas dans votre réponse , quoique Mr. Newton pretende l'avoir démontrée , en consequence du peu de resistance de l'éther au mouvement des comètes et des planètes. Mais comme je suis porté à croire que le monde est presque absolument vuide de corps , (¹) et qu'en un espace absolument vuide , rien n'empêche que la vitesse des corps ne soit aussi immense que l'on voudra , j'ai essayé de faire voir que votre théorie n'excluoit pas nécessairement une plus grande vitesse , et une plus grande rareté que vous n'aviez supposées : néanmoins je n'ai pas dit les raisons que j'ayois pour établir une si grande rareté , lesquelles me paroissent avoir beaucoup de force , même quand j'entre dans toutes vos explications mais ce n'est pas ici le lieu d'en parler d'avantage. L'objection la plus sensible qui se présente contre mon hypothèse est que ma

(¹) Comment faites vous donc passer la lumière des étoiles et du soleil jusqu'à nous ? H.

matiere devrait s'épaissir extraordinairement autour de la terre , et vous croiez Mr. , que je n'ai pas répondu à cette objection. Mais pour ne pas rejeter ce que j'ai déjà dit dans ma premiere lettre , on verra quand on voudra l'examiner , que dans ma demonstration la condensation de la matiere n'augmente point de plus en plus autour de la terre , au dela d'un certain degré ; mais que la condensation déterminée , qui se fait presque en un moment auprez de la terre , et qui est si petite que l'on veut , y demeure toujours la même , et se repand incessamment plus loin , neanmoins sans devenir plus grande , quoiqu'elle s'étende de plus en plus en de nouveaux espaces. (1)

Voila Mr. , ce que j'ai dû vous devoir écrire , où vous pourrez remarquer l'égard que j'ai eu pour les objections , que vous m'avez fait l'honneur de me proposer , puisque je ne les ai pas voulu negliger toutes au point de ne leur donner réponse ; et vous pouvez voir en meme tems que je me suis fort resserré pour m'accomoder autant que je pouvois à ce que vous souhaittiez de n'entendre plus parler de cette theorie. Je vous assure Mr. , que je n'en suis point amoureux , ni entêté , quoique je ne puisse m'empêcher de lui voir un trez grand air de vraisemblance. Il y a déjà longtemps que ces études ne me touchent plus autant qu'elles faisaient autrefois , et ce n'est pas un effort mediocre qu'il me faut faire pour mettre mes pensées sur le papier. Mais il y auroit de l'injustice , à ne vous en pas rendre conte , quand elles ont tant soit peu d'apparence de verité. — Mr. Newton , Mr. , m'a assuré qu'il prenoit en fort bonne part tout ce qui est dant le traité de la cause de la pesanteur.

Mr. Halley ,

(1) Jusques à quelle estendue d'espaces ira-t-elle , et le mouvement , qui doit produire la pesanteur , se ferait-il encore dans cette estendue de matiere condensée ? H,

Mr. Halley m'a donné le nom de quelques unes des liqueurs froides qui ont servi à produire du feu en présence de la Société Royale, sans aucun mélange d'étoupes ou de coton ni d'aucune chose semblable ; car cette expérience y a été faite séparément avec plusieurs différentes liqueurs. Les huiles de bois qui sont fort pesantes, telles que sont les huiles de buys et de sassafras, et l'huile de guaiac, peuvent être prises pour une des liqueurs, mais l'huile de carvé est la seule huile légère, que l'on ait trouvée, qui fasse le même effet. Sur une de ces huiles on verse une eau forte extrêmement rectifiée, et faite de parties égales de nitre et d'huile de vitriol : et on en verse jusqu'à ce que le feu se mette au mélange, ce qui se fait bien promptement. Celui qui a fait voir toutes ces expériences à la Société est un chymiste nommé Mr. Molt.

Je soupçonne Mr. que ce qui vous empêche d'entendre ma démonstration est ce que je disois que la pyramide TZV (fig. 39) peut être plus large vers la base que la pyramide PZQ . Mais cette plus grande largeur ne fait nullement la force de ma démonstration, et je ne l'ai admise que parce que, ma matière étant divisée en ses différentes classes, les particules d'une même classe ne peuvent pas être entre elles exactement de la même grosseur, de la même figure, et avoir le même ressort, la même vitesse, et le même mouvement sur leurs centres, ni s'appliquer exactement de la même manière à la petite surface ZZ , qui ne peut pas d'ailleurs être exactement plane. Or, toutes ces causes concourent à faire que la même classe, après la réflexion, s'écarte dans une pyramide tant soit peu plus large qu'avant la réflexion. Avant que de finir, Mr. je dois vous dire que, quand je reçus votre première lettre, je travaillois encore à mes recherches touchant la cause de la pesanteur, et que ce n'étoit que depuis très peu de jours que j'avois vu que les objections, qui auparavant me sembloient la détruire, n'avoient véritablement aucune force contre elle.

Je resolus donc de vous en écrire , tandis que votre traité n'étoit pas encore public , quoique je l'eusse vû entre les mains de Mr. Hampden. Votre lettre Mr. me trouva dans cette disposition , et je ne vous cacherai point que je crûs que ma reponse , où j'expliquois mon hypothese , viendrait assez tôt pour vous donner lieu d'augmenter les additions , qui sont à la fin de vos traittez. C'est à cela en partie qu'il faut attribuer mon empressement. Quand vous aurez compris mes demonstrations Mr. , qui ont dans mon esprit un degré d'évidence aussi grand qu'il soit possible , vous jugerez s'il vous plait si cet empressement étoit respectueux et s'il parloit d'un coeur qui vous fut entierement attaché. (¹) Je suis etc.

A Mr. Fatio de Duilliers.

Ce 3 Avril 1691.

J'oubliai hier au soir Mr. parmy l'embaras de l'enterrement de vous prier de me restituer devant votre depart la lettre que cy devant vous avez eu la bonté de me faire , en m'expliquant votre methode de trouver les lignes courbes par la propriété de leurs tangentes. Je vous aurois aussi demandé d'y vouloir joindre quelque chose de ce que vous avez depuis adjouté à cette methode , ou si cela vous donnerait trop de peine , d'ajouter seulement les 2 exemples que vous en avez donné dans les courbes que je vous avois proposées comme aussi à Mr. Leibnitz. Comme vous avez tous deux penetré fort avant cette matiere , j'ayme bien mieux de

(¹) Il semble que selon sa theorie il devoit y avoir de la pesanteur vers un globe de marbre ou de metal.

Je ne vois pas aussi comment il peut expliquer que le dedans d'un corps solide ressent l'action de la pesanteur , et cela précisément suivant la quantité de la matiere.

profiter de vos deconvertes, que de me donner la peine d'y travailler sur les fondemens contenus dans votre lettre, à quoy mesme je pourrois ne pas reussir.

Il vous souviendra au reste que, dans la dernière lettre que je vous montray de Mr. Leibnitz, il vous proposoit un échange de son secret, au cas que dans le probleme, que je viens de dire, il y eust des racines composées dans l'équation de la tangente, contre vostre solution dans mes 2 courbes. Et il vous souviendra de plus, que longtemps auparavant je vous avois proposé une ligne courbe (fig 40) AON, dont j'avois la quadrature, estant telle que AG estant perpendiculaire sur son asymptote GM, tout espace AOF, retranché par une ligne OF parallele à l'asymptote, estoit egal au rectangle BL, partie du quarré AGLC, lorsque BP passait par le point D, auquel OF continuée rencontre le quart de circonference ADL. Et que mesme par cette quadrature donnée vous trouvastes l'équation de la courbe. Or a cause qu'il pourroit arriver que j'eusse à prouver ce fait à Mr. Leibnitz, je vous supplie, Mr. de me permettre et de me donner moyen, en faisant response à ce billet, de pouvoir alleguer vostre temoignage de ce que cela s'est passé ainsi, en designant la courbe seulement par son equation, que vous trouvastes $xyy = ayy - axx$. Vous ferez plaisir et obligerez beaucoup Mr. etc.

A Mr. Huguens.

Ce 30 Mars 1691, s. v.

Voici Mr. de quelle maniere je fis mon calcul, suivant la theorie, que j'ai eu quelque fois l'honneur de vous expliquer, lorsque vous me proposastes, il y a quelque temps, de trouver l'equation d'une courbe geometrique, que vous connaissiez, par la propriété que vous me donnastes de sa quadrature.

Soit (fig 40) C le centre d'un quart de cercle ADSL, dont les

lignes AFIG, LPGM sont tangentes en A et L. La propriété de la courbe AOHN est telle, que d'un de ses points O tirant la ligne OFD parallèle à ML et par le point D la ligne BDRP, égale et parallèle à AG, l'espace AOF est toujours égal au rectangle AP. OFIH = AG × RS. C'est-à-dire $(y + \frac{1}{2}u)z = r\beta$

$$CL = r, AF = x, FO = y, FD = v,$$

$$OK = z = DR, KH = u, RS = \beta.$$

Or l'équation au cercle ADL est $x^2 - 2rv - v^2 = 0$.

Donc par ma methode des tangentes $2xz - 2r\beta + 2v\beta = 0$.

Donc $\beta = \frac{xz}{r-v}$. Or $v = r - \sqrt{r^2 - x^2}$, donc $\beta = \frac{xz}{\sqrt{r^2 - x^2}}$; on

trouve donc $zy = \frac{rxz}{\sqrt{r^2 - x^2}}$, et par consequent $y^2 = \frac{r^2 x^2}{r^2 - x^2}$, qui est l'équation à la courbe AOH.

Ce que je viens d'écrire, suffira, Mr. s'il vous plait pour le present, car j'ai l'esprit encore trop abattu pour faire une plus longue lettre. Je suis, etc.

A Mr. Huguens.

A Londres, ce $\frac{18}{28}$ Dec. 1691.

Mr. Il est assez inutile de prier Mr. Newton de faire une nouvelle edition de son livre. Je l'ai importuné plusieurs fois sur ce sujet, sans l'avoir jamais pu flechir. Mais il n'est pas impossible que j'entreprenne cette edition (*); à quoi je me sens d'autant plus porté, que je ne croi pas qu'il y ait personne qui entende à fonds une si grande partie de ce livre que moi, graces aux peines que

(*) Mr. Newton seroit heureux. H.

j'ai prises et au temps que j'ay employé pour en surmonter l'obscurité. D'ailleurs je pourrois facilement aller faire un tour à Cambridge, et recevoir de Mr. Newton même l'explication de ce que je n'ai point entendu. Mais la longueur de cet ouvrage m'épouvante, puisque par les différentes choses que j'y voudrois ajouter (¹), il feroit un folio (²) assez raisonnable. Ce folio néanmoins se liroit et s'entendrait en beaucoup moins de temps que l'on ne peut lire ou entendre le quarto de Mr. Newton. Voila un dessein Mr., capable de m'occuper pendant deux ou trois années, et je ne voi point trop comment le concilier avec l'état de ma fortune, à moins que je ne me puisse résoudre à rechercher qu'un assez bon nombre (³) de personnes s'accordent à faire des souscriptions, comme on les pratique ici, pour s'assurer des exemplaires en papier roial; et cela à un prix qui puisse me mettre l'esprit en repos. J'aurois été bien aise Mr., d'avoir eu une copie de ce que Mr. Leibnitz. vous a écrit. Autant que j'en puis juger à present il me semble, que je ne gagneray guere au change qu'il m'a proposé. J'entens fort bien tout son *calculus differentialis*, non obstant les fautes d'impression, qui sont en si grand nombres, qu'on les croiroit faites à dessein: mais c'est que je n'ai étudié ce qu'il en a écrit que depuis que j'ai eu d'ailleurs les memes choses. Je puis, comme lui, trouver la tangente quand l'équation de la courbe est proposée avec des incommensurables aussi complexes que l'on veut. Je retrouve en une infinité de cas, l'équation de la courbe, lorsque la propriété des tangentes est donnée avec des incommensurables complexes. L'essai de ma mé-

(¹) N'y ajoutez pas tant. H.

(²) Plustost in 4°. H.

(³) 200 exemplaires suffiroient. H.

thode a fort bien reussi pour la soustangente que vous me marquez $\frac{y y \sqrt{a a - x x}}{a x}$, sans avoir recours à aucune quadrature. (¹) Mais il

est vrai, comme le dit Mr. Leibnitz, qu'il y a plusieurs manieres de resoudre ce probleme. Il me paroît par tout ce que j'ai pu voir jusques ici, en quoi je comprends des papiers écrits depuis bien des années, que Mr. Newton est sans difficulté le premier auteur du *calculus differentialis*, et qu'il le connaissait autant ou plus parfaitement que Mr. Leibnitz ne le connoit encore, avant que ce dernier n'en eut eu seulement la pensée, qui même ne lui est venue, à ce qu'il semble, qu'à l'occasion de ce que Mr. Newton lui écrivit sur ce sujet. (Voiez Mr. s'il vous plait la page 253 du livre de Mr. Newton). Aussi je ne puis assez m'étonner que Mr. Leibnitz n'en marque rien dans les *Acta Lipsiensia*. Les dernieres ouvertures que j'ai eues sur cette matiere me sont venues de deux mots (²) seulement, que m'a dits Mr. Newton; et j'ai été surpris qu'ayant été jusque là si prez d'avoir les mêmes choses, elles eussent pû échapper pendant si long temps à ma connaissance. — Vous ne me dites rien Mr. de la derniere experience de vos pendules sur mer. (³) — Ma santé n'est gueres établie, et mes études souffrent beaucoup de ce côté-là. Je n'ai pas laissé néanmoins de trouver depuis un mois ces mêmes choses, qui sont écrites sans démonstration dans les chap. 85 et 91 de l'Algebre de Mr. Wallis. Je fis ma recherche sans voir le livre, et ensuite j'en comparai le resultat avec ce que Mr. Wallis a imprimé, et je ne trouvai aucune difference que dans le choix des lettres que nous emploions. Comme ma demonstration est extreme-

(¹) Cela vaut donc mieux que ce que promet Mr. Leibnitz. H.

(²) Je serois bien aise de scavoir ces 2 mots. H.

(³) Il faudra attendre un an encore. H.

ment courte et qu'elle regarde une doctrine fort générale sur un sujet plein de difficulté, et qui néanmoins est tout à fait utile, peut-être mériterait elle d'être imprimée. — Je suis etc.

A Mr. Huguens.

A Londres, ce $\frac{5}{15}$ Fevr. 1692.

Mr. Depuis que je suis de retour en Angleterre, je n'ai pu retrouver cette theorie de la pesanteur, que vous vites pendant que j'étois à la Haye, et que j'avois déjà communiquée à Mrs. Newton et Halley. S'il y a encore quelque esperance de la retrouver, il faut Mr. que je l'aye laissée chez vous, ou à l'Academie; ce que je vous prie trez humblement Mr. d'examiner. Mais pour ce qui regarde l'Academie, il suffira s'il vous plait d'en faire dire deux mots à Mr. Thornton et à Mr. Fabre, son Gouverneur, et j'espere de leur diligence qu'ils découvriront ce papier, s'il est à leur portée, et qu'ils m'en diront des nouvelles. En cas que vous ne l'avez par Mr., je serois ravi d'apprendre que vous en eussiez gardé une copie ou du moins un extrait. Je ne sçai si je ne l'aurois point prêté à Mr. Dierquens, mais je ne m'en souviens pas. J'ai d'autant plus de chagrin de l'avoir perdu, que je ne scaurois plus retrouver ce qu'il contenoit.

Mr. Newton croit avoir decouvert assez clairement que les anciens, comme Pythagore, Platon etc., avoient toutes les demonstrations, qu'il donne du veritable systeme du monde, et qui sont fondées sur la pesanteur, qui diminue reciproquement comme les quarez des distances augmentent. (¹) Ils faisoient, dit-il, un grand mystere de leurs connoissances. Mais il nous reste divers fragmens,

(¹) Il aura vu le passage de Plutarque, au liv. de *facie in orbe Lunae*. H.

par où il paroît , à ce qu'il prétend , si on les met ensemble , qu'effectivement ils avoient les memes idées qui sont repandues dans les *Principia Philosophiæ Mathematicæ*. Quand Mr. Newton se seroit trompé , il marque toujours beaucoup de candeur de faire un aveu comme celui là.

Les lettres que Mr. Newton écrivit à Mr. Leibnitz , il y a 15 ou 16 ans , parlent bien plus positivement que l'endroit que je vous ai cité des Principes , qui néanmoins est assez clair ; surtout quand ces lettres lui servent d'explication. Je ne doute pas qu'elles ne fissent quelque peine à Mr. Leibnitz , si on les imprimoit , puisque ce n'est que bien longtemps apres qu'il a donné au public les regles de son *calculus differentialis* , et cela sans rendre à Mr. Newton la justice qu'il lui devoit. Et la maniere dont il s'en est acquitté est si éloignée de ce que Mr. Newton a la-dessus , que je ne puis m'empêcher en comparant ces choses ensemble , de sentir bien fortement leur difference , comme d'un original achevé et d'une copie estropiée et trez imparfaite. Il est vrai Mr. , comme vous l'avez deviné , que Mr. Newton a tout ce que Mr. Leibnitz paroît avoir , et tout ce que j'avois moi même , et que Mr. Leibnitz n'avoit pas. Mais il est encore allé infiniment plus loin que nous , soit pour ce qui regarde les quadratures , soit pour ce qui regarde la propriété de la courbe quand il la faut trouver par la propriété de la tangente. Il ne se contente pas par exemple de retrouver l'équation de la courbe , lorsque sa fluxion est donnée , pour me servir de ses expressions , c'est-à-dire lorsqu'on a l'équation de la tangente. (¹) Il la retrouve encore , lorsqu'on a la fluxion de la fluxion , ou la fluxion de la fluxion de la

(¹) S'il peut connoître par l'équation si une courbe est quadrable. — Si une sous-tangente étant donnée il peut dire s'il y a une courbe à qui elle convient? H.

la fluxion, etc. Ce qu'il a sur les quadratures est infiniment plus general que tout ce que l'on avoit auparavant, et il est trez simple et d'un usage merveilleux dans toutes les parties de la Geometrie.

On a arreté Mr. le Comte du Quesne Monros, parce qu'il avoit connu Mr. de Genes, et ses amis n'ont pas meme la liberté de le voir. La lenteur que le grand nombre d'affaires apporte en ce pays à celles qui ne sont pas de la derniere importance, me fait craindre que sa prison ne dure encore bien longtems. Je suis d'autant plus touché de ce qu'il souffre, que je connois parfaitement son innocence. (¹) Il ne tiendra pas à moi que Mr. Leibnitz ne scache la methode dont je me servais pour retrouver en certains cas l'equation de la courbe par l'equation de la tangente. Mais je dois me rejouir, si je veux encore approfondir ce sujet, d'avoir rencontré en Mr. Newton un guide sans comparaison plus éclairé et plus genereux, quoiqu'il y ait bien du plaisir de travailler sur son propre fonds. Je tacherai de me consoler de ce que Mr. Leibnitz se dédit des engagements où il étoit entré de lui même. Bien qu'il y ait toujours à perdre quand on n'apprend pas une chose qu'on auroit pu scavoir, je ne serai pas fâché d'avoir évité de faire des échanges de propositions de mathematiques, comme de marchandises. Pour vous Mr., vous etes embarqué dans ce négoce, et je crains que Mr. Leibnitz, qui met toujours ses denrées à un fort haut prix, ne se montre difficile à se contenter sur les avances qu'il pretendra vous avoir faites. Je n'ai encore ni abandonné, ni embrassé absolument la pensée de faire une seconde edition du livre de Mr. Newton. Je suis etc.

(¹) Je m'étonne qu'il n'ait pas mieux connu de Genes, de qui avec raison on n'a pas bonne opinion. Je croy pourtant du Quesne innocent. H.

A Mr. Huguens.

A Londres, ce de $\frac{7}{17}$ Mars 1692.

Mr. Je vous rends mille graces des peines que vous vous etes données pour retrouver mon traité de la pesanteur. Je n'espère plus de le revoir jamais, ni même d'en composer un nouveau, à cause d'un degout et repugnance invincible, que je me sens, à rechercher une seconde fois les memes choses que j'avois deja eues. Mr. Newton se relache deja sur l'impression de son traité des lignes courbes. Sa premiere chaleur est passée, et je ne croi qu'il s'accoutume peu à peu à juger qu'il n'est pas fort nécessaire qu'il s'engage dans les embarras que l'impression d'un traité, comme celui là, traine necessairement après elle. Nous y perdrons beaucoup assurément si ce traité ne paroisoit point. Je ne scai si je vous ai dit Mr. que Mr. Newton a donné une methode bien étendue de trouver la courbe la plus simple dont depend la quadrature d'une courbe proposée. Il est certain que jusques à présent il n'a encore rien paru de si beau dans la Géometrie abstraite, que cet écrit, qui n'est de quelques feuilles, et qui ne seroit point trop long pour entrer dans une Transaction. Si je ne l'avois pas parcouru j'aurois peut être poursuivi les idées que j'avois en Hollande, et dont nous nous sommes quelquefois entretenus ensemble; car je ne desespérois pas de pouvoir trouver tout ce qui me manquait de la methode de Mr. Leibnitz et même quelque chose de plus. Ce qui n'étoit pas sans fondement, vu les différentes entrées que j'avois deja à des solutions et à des methodes, qui reussiroient fort bien, et à qui il ne manquait pas beaucoup, ce me sembloit, pour les rendre assez generales. Mais j'ai été glacé en voyant ce qu'a fait Mr. Newton, et je lui ai reproché qu'il rendoit inutile mon travail, et qu'il ne vouloit rien laisser à faire à ses amis, qui sont venus aprez lui. Je croi que dans la

suite il ne faudra pas que j'entreprenne d'études un peu difficiles et de longue haleine , sans être assuré de sa part que l'envie ne lui prendra pas de traiter le meme sujet. — Mr. le Comte de Monros a été traité d'une maniere si differente de ce qu'il auroit merité, qu'il est bien malaise de l'empêcher de croire que des émissaires ou des amis de la France n'aient causé tout son malheur.

Je suis etc.

§ XIII.

Ad pag. 124 verba: *Je souhaite fort d'apprendre, cet.*

Ex iis quae in Additamento ad dissertationem de Causa Gravitatis (Hugen. Opp. Omn. T. II. p. 116. sqq.) relata sunt, apparet Hugenum, ex auctoritate Curatorum Societatis Indiae Orientalis, pericula fecisse, quibus experiretur quatenus horologiorum suorum ope longitudo mari definiri posset. Prioris tentaminis exitum auctor ipse l. l. commemoravit, alteriusque eo quo scribebat tempore instituti, nondum vero peracti, tum ibidem, tum etiam in hac epistola, mentionem fecit. Haud tamen diu post, cum ab itinere rediissent nauetae, quorum curae horologia mandata fuerant, alterum illud experimentum ad finem perductum est. Utriusque itineris, quoad haec experimenta, ampla nobis in MMS. Hugenanis servata est relatio, e qua eo lubentius quaedam huc spectantia proferam, cum agatur de insigni praeclarae inventionis usu et applicatione, nostris etiam minus diebus totius orbis terrarum navigantibus perquam grata et accepta.

Quod igitur ad priorem expeditionem spectat, epistolae particulam exhibebo, a Hugenio ad Fullenium Professore Franequerensem, 24 Oct. 1686, scriptae, e qua efficias, nec curae nec labori pepercisse Hugenum ut experimenta rite succederent.

» Longitudinum inventum quod attinet, cujus successum properum mihi tam amice precaris, eum ego quis futurus sit patienter exspecto, donec ab Africae angulo, Capite Bonae Spei horologia revertantur, quae bina eo vecta fuere iis navibus, quae initio

mensis Junii a Texelia discessere. Cura eorum nautae cuidam e peritioribus, quemque multo ante praeceptis instruxeram, commissa fuit, addito horologiopaeo, rebusque omnibus necessariis provisus, qua in re operam insignem praestitit D. Huddenius. Visum fuit autem, quo maturius de exitu rei certiores fieremus, non usque in Indiam cum iis navibus horologia perferri, sed eo quem dixi loco operiri, donec ea ex India aliae naves reversae reducant, quas tamen vere proximo demum expectandas ajunt. Feceram ipse periculum autem in mari interiori, quod nos a vobis dirimit, visurus nempe quam bene jactationem navigii non ita magni toleraret pendulorum motus: atque ab eo experimento itemque alio, in mediterraneo mari olim capto, non male de succesu negotii hujus nunc auguror. »

Qualis vero hujus expeditionis exitus fuerit, ipse Hugenus l. supra l. tradidit. Docuit enim experientia, horologia longitudinis differentiam, Texeliam inter et dictum promontorium, verae proximam exhibuisse, atque universe navigii cursum ex eorum indicatione confectum, probabiliter conspirasse cum eo, qui ex nautarum existimatione sequebatur; illum vero consensum multo esse majorem, si in itinere ex horologiorum motu deducendo, ratio haberetur motu diurni telluris. Caeterum ex relatione apparet multas concurrisse causas, quae effecerunt ut haec expeditio nec plures nec maturiores tulerit fructus; inter quas praecipue recensentur: defectus observationum cum navis Texelia littore solveret; horologiorum imperfecta suspensio, marisque agitatio, quae motum pendulorum haud raro perturbavit, aliquando etiam interrupit; rei denique novitas, qua factum est ut observatores, quamvis bene instructi, graves commiserint errores, et de horologiis administrandis nonnumquam secum invicem litigarint, ipsi vero, ut fit, a reliquis nautis ludibrio habiti sint.

Altera expeditio, quae a 29 Dec. 1690 ad mensem Octobris a. 1692, locum habuit, priori haud multo felicior fuisse videtur. Itinere enim peracto, constitit horologia longitudinis differentiam inter insulam St. Jago, et promontorium B. S. eam exhibuisse, quae in optimis illius temporis mappis globisque geographicis inveniebatur, universe autem navis trajectum ex horologiis confectum, magis quam in priori itinere ab eo discrepare, qui ex nautarum existimatione erat conflatus, quod Hugenus non horologiis suis, sed marium diversis fluctibus navim deflectentibus tribuendum putavit. Apparuit vero etiamnum horologia pluribus causis perturbantibus, eorumque motum aliquando sistentibus fuisse exposita, observatorem autem non semper ea sedulitate et cura usum fuisse, quae in re tanti momenti requirebantur, eumque denuo in graves quosdam incidisse computandi errores; observandi denique opportunitatem iterum, cum patriam relinquerent itineratores, defuisse. Quibus omnibus si addamus, diversorum locorum positus eo tempore nondum satis accurate fuisse determinatas, haud mirum videbitur, Volderum, Professore Lugduno-Batavum (cui Hugenus hujus itineris relationem, suasque in eam animadversiones examinandas mandaverat) hanc pronuntiasse sententiam: ex institutis tentaminibus probabile quidem factum esse problema de longitudine mari horologiorum ope definienda posse solvi, nihil vero magis ex iis huc usque esse concludendum.

Neque etiam aliter ea de re sensit Hugenus, qui, quamvis optato successu altera vice careret, nec animo nec spe fractus est, neque etiam desiit in nova inquirere auxilia, quibus aliquando navigantium itinera tum breviora redderet, tum omnigenis periculis minus obnoxia. Testes mihi sint ultima epistolae verba, quam ad Curatores S. I. O. scripsit, ut viris nobilissimis suum de experimentis eorum auctoritate institutis iudicium declararet.

» Ick en twijffel dan oock niet of men zoude deze inventie verder kunnen perfectionneren, met beter en solider horologieen van deze soort te maecken, en voorts te besorghen, 't geen ick in mijn rapport aangaende de reijs van 't jaer 1687 aangewesen hebbe. Doch ik en sal nu niet aenhouden bij UEd. Gr. Achth. dat sulx moghe geffectueert werden, ofte deze horologieen verder geemploijeert, dewijl ick iets geheel anders en ongelijck beters, bij deze occasie uijtgevonden en tegenwoordigh onder handen hebbe, waer door al 't geene eenighe difficulteijt geeft in 't gebruijck deser inventie t'eenemael werdt weghgenomen. Waervan te sijner tijdt naerder openingh aan UEd. Gr. Acht. hoopende te doen, zal blijven » enzv.

Quale novum hoc praestantissimi viri inventum fuerit mox explicabimus.

§ XIV.

Ad pag. 126 verba: *un certain mathématicien de Zélande.*
Coll. epist. 38. pag. 132.

Novum et plane incognitum Mathematicum h. l. memoratum invenimus, Hubertum nempe Huyghenium, Zelandum, qui studiorum amore nostro Christiano conjunctissimus fuit. Quis et qualis fuerit iste Hubertus, ipse nos docet, cum Christiano, interroganti, originem suam explicuit. Quos vero in disciplinis mathematicis progressus fecerit, tum ex iis, quae de eo ad Leibnitium scripsit Christianus, confici potest, tum ex paucis his litteris, quae inter utrumque Huyghenium intercesserunt.

I.

Viro nobilissimo Christiano Hugenio S. P. D. Hubertus Huighenius.

Si parvus, qui has comitatur literas, fidem inveniat libellus, magnum momentum habebit ad obtinendum scopum suum, nempe solutionem cujusdam propositionis, quam ab omnibus quidem peto, sed a te, vir nobilissime, certo expectare possum.

Incrementum, quod per te scientiae acceperunt, certum me reddit quod etiam libenter per solutionem illius propositionis, in qua non nisi ex rectis lineis quaerenda est longitudo rectae lineae, cognitum reddas proportionem, quae est inter circulum et quadratum ejus diametri.

Quin imo tanta me tenet ejus rei fiducia, ut in totum supersederem me hic excusare, quod tibi ignotus ea de re molestus sim,
nisi

nisi vereretur, ne magnitudo rei, quam promitto, de solutione illius propositionis omnem mihi fidem adimat.

Quod si illa, et nulla alia, causa impediat, quo minus lubeat manum illi operi admoveere, libenter illam per demonstrationem tollam.

Litterae tuae, si de voluntate vestra digneris me certum facere, mihi transmitti poterunt per libelli mei bibliopolam, cujus nomen et locum domicilii pagina tituli indicabit.

Sed vereor, ne nimium abutar humanitate vestra, quare aliud nihil hic addam, quam quod velis illius rei culpam adscribere desiderio, quo teneor videndi, ut per te, Vir nobilissime, ultima manus imponatur rei tam diu frustra quaesitae. Vale,

Dabam Medioburgi 20 Januarii 1692.

2.

Viro et Geometrae eximio Huberto Huyghenio Chr. Hugenijs

S. P.

Ex iis, quae ad me misisti, perspicio egregie te versatum in rebus geometricis et analitico calculo. Vix tamen eo, quo speras, te perventurum puto; certe operam meam frustra hic tibi venditarem. Ex datis quadraturis invenis, ut video, aequationes curvarum linearum, ad quas illae pertinent, quarum exempla aliquot examinavi et recte se habere comperi, unde et de caeteris nihil ambigo. An autem eadem methodo hic utaris, qua ego (quae nempe ex Barovii theoremate ⁽¹⁾ quodam pendet) ignoro. Sed insigni industria

(¹) Theorema Barovii, quod Hugenijs hoc loco commemorat, est hujusmodi: (const.

saepe usum te adverte in ejusmodi quadraturis formandis, unde aequationes curvarum oriantur, quae paucis terminis constant; nisi forsitan aliunde, ut fit, quadraturas istas erueras. Nam contraria via ex aequatione ad quadraturam pergere, etsi nonnumquam contingat, vix id in tuis illis concedi crediderim, nec Tschirnhausio se hic jactanti fidem habeo. Evenit quidem mihi, ut cum aequationem curvae 15^{ti}. exempli tui celebri geometrae proposuissem, ille quadraturam ejus, qualis tua est, invenerit, cum et ego meam haberem, sed suspicor a posteriori, ex collectis tuo modo exemplis, id eum praestitisse. Quamquam autem innumeras curvas quadrabiles ita invenire liceat, non inde sequitur talem quadraturam effici posse, cui curva quaedam, quam tibi quadrandam proponis, conveniat. Ac proinde non video, quo pacto pag. 9, ex solutione problematis tui a posteriori, concludas omnium curvarum quadraturas haberi posse. Nam ex. gr. cum aequatio circuli sit $2ay - yy = xx$, an putas quadraturam talem aliquam excogitari posse pag. 6^a. vel 8^a.

ipsius verba legenda in Libro Advers. H. p. 14.) AB (fig. 41) est curva; AC recta ad quam normalis applicata BC; atque productae occurrit normalis curvae BD in D. Jam subnormalis, quam dico CD, aequalis statuatur CF, eidem AC perpendicularis, idque sic ubique fieri intelligatur, et esse curvam FE ad quam omnes istae subnormales erectae terminantur. Jam spatium AEFC erit aequale dimidio quadrato BC.

Sit $AC = x$, $CB = y$, $CD = z$. Ex puncto H proximo B cadat HG perpend. in AC et ducatur HK parallela AC. Jam GC differentiola $\tau\omega v$ x est x , et BK differentiola $\tau\omega v$ y est λ . Et quia triangula similia sunt HKB, BCD erit, ut BC y ad CD z , ita HK x ad KB λ , unde $y\lambda = zx$. Et summa omnium $y\lambda =$ summae omnium zx , hoc est $\frac{1}{2}$ quadr. BC $=$ spat. AEFC. Est enim $y\lambda$ rectangulum exiguum LN, facta LM $=$ LA $=$ BC $= y$, nam MN $=$ BK $= \lambda$. Itemque zx est rectangulum seu spatium GF, atque ita singula rectangula exigua in triangulo MLA aequalia respectivis spatiis seu rectangulis in spatio AEFC, unde et summa summae.

ut inde haec aequatio nascatur. Hoc ex tuis nequaquam efficitur, et frustra te fatigares. Recte autem affirmas totum quadraturae negotium hinc pendere, ut ex data linea tua BC (quam brevitatis gratia subnormalem vocare soleo, quia normali in curvam ductae subjacet) inveniatur aequatio curvae, ad quam pertinet. Si enim subnormalis haec BC (fig. 42) detur $= \sqrt{2ay - yy}$ vel $= \sqrt{aa - yy}$, possisque hinc curvam propriam invenire, jam constat te quadraturam circuli habiturum, utque proinde pag. 12, ad septimam potestatem literae y adscenderent nil opus fuerit. Caeterum hoc problema eximium jam diu geometras peritissimos exercet, nec putandum est, ipsum semper solutionem admittere. Vellem tantum hoc definiri posset, an subnormalis data ad curvam geometricam pertineat an ad alius generis aliquam, an denique ad nullam. Habemus quidem rem confectam finitis casibus, ubi subnormales dantur absque

radicalibus quantitibus, ut si sit subnormalis $\frac{aay - 2yyx}{3aa - 2xy}$

vel $2y + \frac{y^3}{xx}$, reperientur aequationes curvarum geometricarum,

quibus haec conveniunt. Aliis vero casibus non succedet; ut, si

detur subnormalis $\frac{2aax}{2aa - xx - yy}$, hic cessat regula. Rursus aliis

casibus alia methodo ad quadraturas res deducitur, ut si detur

subnormalis $\frac{xx}{a}$, vel $\frac{aa}{\sqrt{aa - yy}}$, invenitur, ad prioris curvae quae-

sitae puncta designanda, hyperbolae quadraturam requiri; ad posterius, tum circuli tum hyperbolae. Horum aliquid an tibi compertum sit scire velim. Item quo modo pag. 10. solutionem secundae propositionis tuae, cum quadratura per x datur, ad quadraturas hyperbolae aut circuli deducas, et an semper eo devenias, etiamsi curva quaesita sit geometrica? Velut cum datur quadratura ista:

$$a\psi = \left(\frac{1}{3}\frac{dd}{c} + \frac{2}{3}x\right) \sqrt{\left(\frac{1}{4}dd + \frac{1}{2}cx\right)} - \left(\frac{1}{3}\frac{dd}{c} + \frac{2}{3}x\right) \sqrt{\left(\frac{1}{4}\frac{dd}{c} - \frac{1}{2}cx\right)},^{(1)}$$

ubi curvae aequatio est $y^4 = ddy - ccx$, eadem quae in tuo 15^o. casu. Non intelligo etiam quali calculo ex quadraturis pag. 8 elicies aequationes curvarum pag. 9. Ad haec omnia ut mihi rescribas etiam atque etiam a te peto. Tum ut de te ipso docere velis, qui sis et ex qua Huygheniorum familia, nam non esse eandem, nostra armorum insignia ostendunt. Vale!

Dabam Hagae Com. 12 Feb. 1692.

Missis ante triduum litteris ad te meis, Vir eximie, nunc appendicem adjungo, quod adverti errorem meum in exprimendis subnormalibus, quas voco, quem hic corrigendum duxi; ne forsan aliquid circa eas calculo investigans, frustra operam insumas. Ita-

que pro $\frac{aay - 2yyx}{3aa - 2xy}$ scribe $\frac{3aaxx - 2x^3y}{aay - 2yyx}$; pro $2y + \frac{y^3}{xx}$ scribe $\frac{x^4}{2yxx + y^3}$; pro $\frac{2aax}{2aa - xx - yy}$ scribe $\frac{2aa - xx - yy}{2a}$; pro $\frac{aa}{\sqrt{aa - yy}}$ scribe $\frac{xx\sqrt{aa - yy}}{aa}$. Sola $\frac{xx}{a}$ recte se habet.

Causa erroris fuit quod solitus sim in problemate inverso tangentium, datas ponere subtangentes, non vero subnormales. Atque ita incaute ex adversariis meis illas pro his tibi descriptas misi. Subtangentes voco, (fig. 43) rectam BF, quae subjacet tangenti eF, sicut subnormalis BC subjacet rectae Ce in curvam perpendiculari.

(¹) In MS. ultimus terminus errore calami sic scriptus est pro:

$-\left(\frac{1}{3}\frac{dd}{c} - \frac{2}{3}x\right)\sqrt{\left(\frac{1}{4}dd - \frac{1}{2}cx\right)}.$

Examinavi porro reliqua omnia exempla tua pag. 6, atque adverti in quibusdam non admodum difficilem esse regressum, ut nempe ex data aequatione curvae reperiatur quadratura ejus, praesertim si compendio quodam utamur, quod tibi non ignotum esse existimo. Vale!

15 Febr. 1692.

3.

**Viro nobilissimo atque eruditissimo Christiano Huigenio
Hubertus Huighenius S. P. D.**

Imperitia et lata culpa tabellarii ad aedes domini, cujus cognomen (Hubert) mihi praenomen est, venere, et neglectae diu jacuerunt literae tuae, quae in Persarum Regis Darii scrinio, si ejus mihi copia foret, apud me servarentur.

Causam audis, quare prius non respondi; nullam prorsus mihi spem reliquam perveniendi ad scopum, cujus obtinendi gratia parvus ille libellus a me scriptus est, ex literis tuis intelligo.

De praestantia methodus tuae, quamvis mihi incognitae, tamen ex iis, quae ad me scripsisti, dubitare non possum. Utrum vero eadem sit, qua ego utor, non possum affirmare; nam Barrovii theorema incognitum, nomen inauditum mihi est; nullumque authorem, praeter clarissimum Wallisium, cujus methodum probandi capere non possum, de illa materia legi.

Dubitare mihi videris an ex quadraturis ad aequationes curvarum linearum, ad quas illae pertinent, pervenerim, vel aliunde, ut fit, illas eruerim: si mihi occasio daretur, omnem tibi causam dubitandi auferre possem.

Nulla mihi industria opus fuit in formandis quadraturis, unde

aequationes oriuntur, quae paucis terminis constant: ad hoc enim nihil aliud requirebatur, quam ut ex plurimis aequationibus, quas invenerim, simplicissimas eligerem, quod tamen ob quasdam, quae me movebant, rationes, non semper praestiti.

Non video quomodo quis affirmare posset ex proprietate se ad quadraturam generaliter posse pergere; quin eo ipso, quod non tradat quadraturas figurarum, quae desiderantur, inanis jactantiae manifesto deprehendatur convictus.

Non scripsi talem quadraturam effingi aut excogitari posse, cui curva, quam mihi quadrandam propono, conveniat; sed solummodo supposui, talem quadraturam esse, ac ostendi quomodo a posteriori ad illam certo perveniri possit: ex. gr. in circulo, cujus aequatio sit $\sqrt{2ay - yy}$, supponamus (ψ) nec (y) ultra vigesimam potestatem ascendere; certum est, si omnes aequationes inter (ψ) et (y) usque ad vigesimam potestatem examinentur, eo modo et in eum finem, qui pag. 9 praescriptus est, quod infallibiliter perveniatur ad aequationem, in qua inveniat $x = \sqrt{2ay - yy}$; quod probabit in illa aequatione inter ψ et y , segmentum semicirculare, cujus basis est y , aequale esse $a\psi$.

Sed quis mihi spondere posset y et ψ in circulo non ascendere ultra centesimam vel etiam superiorem potestatem? Quare etiam credo quod e re mea non est quadraturam circuli aut hyperbolae eo modo solus quaerere, circa quam secundum omnem apparentiam frustra me fatigare.

Non opus erat circa subnormalem pag. 12 ad septimam potestatem literae y ascendere, sed rem eo modo, quo inveneram, id est per varios circuitus, proposui.

Haec verba: *an vera subnormalis ad nullam curvam pertineat*, non satis intelligo, nam, si concedas mihi libere meam opinionem

dicere, implicare contradictorium mihi videtur, quod subnormalis illa ad nullam curvam pertineret.

Nullo modo ego ex subnormali ad curvam, ad quam illa pertinet, pervenire possum, si data sit aequatio inter subnormalem et perpendicularem x , vel inter subnormalem, perpendicularem x , et basin y .

Magno teneor desiderio videndi talem methodum, qua a priori in duobus illis casibus, in quibus subnormales sunt, $\frac{aay - 2y y x}{3aa - 2xy}$ et

$2y + \frac{y^3}{xx}$, perveniatur ad curvas, ad quas illae pertinent; nec non

cognoscere causam, quare illa methodus a priori aliis casibus applicari non possit: in illis vero casibus, in quibus data est proportio inter subnormalem et basin y , invenio aut curvam, ad quam illa subnormalis pertinet, aut figuram curvilineam, a cujus quadratura

illa curva dependeat. Ex. gr. si subnormalis data sit $\frac{aa}{\sqrt{aa - yy}}$,

invenio curvam dependere a quadratura circuli, quod cum jungatur cum iis, quae a te circa illam subnormalem inventa sunt, proportionem circuli ad hyperbolam cognitam reddet.

Rudis artis pingendi ego in plano delineare non possum corpora, quae mihi necessaria sunt ad demonstrandum quomodo ex quadraturis pag. 8 eliciam aequationes pag. 9; nec non quomodo pag. 10, solutionem secundae propositionis meae cum quadratura per x detur, ad quadraturam hyperbolae et circuli deducam. Sed non semper eo devenio, nam plerumque invenio curvilineam figuram, cujus quadratura cognita est, ut in proposito tuo exemplo, $y^4 = ddy y - c c x x$ vel quod idem est, $y = \sqrt{\frac{1}{4} d d + \frac{1}{2} c x} - \sqrt{\frac{1}{4} d d - \frac{1}{2} c x}$.

Quis et ex qua Huygheniorum familia sim rogas; tui sum, Vir nobilissime, observantissimus. Ne vero videantur facta mea cum verbis non convenire, ad singula haec respondebo.

Pater meus , qui urbis Verensis , cujus ego nunc scabinus , olim concionator fuit , patrem habuit urbis Tholenae consulem , cujus avus inter Brabantinae Provinciae nobiles numeratus , peregrinando fere peregrinus in patria sua factus , filium reliquit , qui nostrae familiae primus provinciae Zelandiae incola fuit.

Quare nomina nostra convenient , cum diversa armorum insignia non eandem nobis esse familiam ostendant , rationem nullam ego reddere possum.

Propediem mihi iter est in Hollandiam ; permissionem te salutandi rogabo , et inter fortunae beneficia numerabo , si praesens tibi , quod jam hisce literis facio , dicere possim , quantopere me tibi devinctum agnosco , quod vir tanti nominis et eruditionis ad me scribere dignatus sit. Vale.

Dabam Verae 3 Martii 1692.

Appendicula tua , postquam has literas scripseram , reddita mihi est. Mutatio in illa nullam causam aliquid mutandi in literis meis praebet , nisi in iis , quae scripsi de invenienda proportionem inter circulum et hyperbolem , quae pro non scriptis haberi peto,

§ XV.

Ad pag. 151 verba: *J'ay rencontré une source peu connue* cet.
 coll. pag. 245, ad verba: *vous ne pourrez ignorer une*
methode peu connue cet.

De fonte, paucis cognito, e quo Hugenus plures quadraturas curvarumque aequationes, datis nempe earundem subtangentibus, aliaque similia hauserit, hoc loco nonnulla sunt commemoranda, tum quoniam plura de eo in Adversariorum libro H. annotata invenimus, tum quoniam res ipsa digna est quae ulterius explicetur.

Methodus sc., qua utitur Hugenus, ea est, quam commendavit Fermatius, in Dissertatione *de aequationum localium transmutatione* (cfr. Fermatii Varia Opera math. pag. 51 — 57), sed quae ibi loci, teste Hugenio, confuse, perverse et nulla addita demonstratione, est proposita; ita ut, si quis hanc methodum in suos usus convertere velit, eadem ipsi illustranda, corrigenda, et demonstratione ornanda sit.

Hunc igitur laborem aggressus est Hugenus, feliciterque ad finem perduxit; nec habuit quod ipsum peracti laboris poeniteret, cum plures ex eo dulcesque perceperit fructus.

Videamus itaque, duce Hugenio, quae sit ista Fermatii methodus, quibus nitatur principiis, quis sit ejusdem usus.

Hugenus primum methodi fundamenta exposuit, eorumque veritatem demonstravit in Advers. Libro H. pag. 110 sq.; dein exempla a Fermatio exhibita illustravit, p. 138 — 140, tandem ipsis methodi praeceptis in nonnullis quadraturis inveniendis usus est p. 141 sqq.

Quod ad methodi principia attinet, haec a Fermatio ponuntur sequentia:

Sit AC (fig. 44) curva, cujus diameter seu axis AB , BC applicata, dividatur AB in partes aequales in punctis b, b, b , etc., itemque BC in partes tum inter se, tum partibus ipsius AB aequales divisa concipiatur: ducantur per puncta b lineae bc parallelae BC , et per puncta k lineae kl parallelae AB ; denique singulae Bc, bc , vocentur a , singulae lk, lk , vocentur e , et $\int$ significet summam; his positis, tres sequentes aequationes locum habebunt:

$$1^a. \int a a = \int 2 a e; \quad 2^a. \int a^3 = \int 3 a e e; \quad 3^a. \int a^4 = \int 4 a^3 e.$$

Haec jam theoremata Hugenus sequenti modo demonstravit.

» 1^o. Summa rectangulorum $kl.kB$ sive rectarum e in distantias suas ab AB , aequaliter crescentes, quae sunt a , est aequalis $\frac{1}{2}$ summae quadratorum ab rectis cb , quae dividunt AB in partes aequales. Ratio intelligitur ex ungula 45° (¹), super figura ABC abscissa per AB , quia ungula haec, secta planis ad figuram rectis secundum lineas lk , facit summam rectangulorum $kl.kB$; eadem vero, secta planis ad figuram rectis secundum lineas bc , facit summam $\frac{1}{2}$ quadratorum ex bc sive a , utrimque nempe omnia ducta intelligenda in unam particularum BC , vel AB rectarum: itaque $\int a e = \frac{1}{2} \int a a$. »

Idem theorema etiam ex alio principio petiit Hugenus, quod nempe summa productorum uniuscujusque rectae a per suum brachium super AB multiplicatae, aequalis esse debeat summae productorum uniuscujusque e per brachium suum super AB multiplicatae; sequentia enim adjecit:

$$\text{» } \frac{\frac{1}{2} a}{\frac{1}{2} a e} \text{ brachia rectarum } a \text{ super } AB; \quad \frac{e}{e a} \text{ brachia rectarum } e \text{ super } AB$$

(¹) Ejusmodi ungula etiam alia opportunitate usus est Hugenus, nempe in suo Horol. Osc. P. IV. def. 14. Cf. sup. p. 73.

$$\int \frac{1}{2} a a = \int a a; \int a a = \int 2 e a.$$

Alterum theorema simili brevi demonstratione adornavit. Legimus enim haec tantum :

• $\frac{1}{2} a a$ semi-quadrata super applicatis, seu trianguli, quorum anguli 45° sunt ad A B.

$\frac{\frac{1}{2} a}{\frac{1}{2} a^2}$ brachia istorum triangulorum super A B.

$a e$ rectangulum B k. k l erectum super l k.

$\frac{a}{a^2 e}$ brachium rectangulorum $a e$ super A B.

$$\text{ergo: } \int \frac{1}{2} a^2 = \int a a e; \int a^2 = \int 3 a a e.$$

Ad tertium theorema demonstrandum, Hugenus, ablata ungula 45° , fingit super omnibus applicatis B C sive a constructa esse residua parabolica ejusdem omnia parabolae, qualia sunt (fig. 45) D E F, D G H, etc., quae sunt inter se ut cubi rectarum a seu applicatarum. Quae residua in sua brachia ducta, hoc est in $\frac{1}{2} a$, facient producta in ratione quadrato-quadratorum super a . Summa vero istorum productorum erit eadem ac eorum quae fiunt e rectangulis H G in K L, ductis in sua brachia a . Sunt autem H G $\frac{a a}{r}$ (si r sit parabolae latus rectum), residua, ut D H G, sunt $\frac{1}{2}$ rectang. H D, hoc est $\frac{1}{2} \cdot \frac{a^3}{r}$. Hinc:

$\frac{1}{2} \cdot \frac{a^3}{r}$ residuum H D G.

$\frac{\frac{1}{2} \cdot a}{\frac{1}{2} \cdot \frac{a^4}{r}}$ brachium super A B.

$\frac{1}{2} \cdot \frac{a^4}{r}$

$\frac{a a}{r}$ recta H G.

$\frac{e}{e}$ recta K L.

$\frac{a a e}{r}$ rectang. H G. K L.

$\frac{a}{a^2 e}$ brachium super A B.

$\frac{a^3 e}{r}$

$$\text{ergo } \int \frac{1}{2} \cdot \frac{a^4}{r} = \int \frac{a^3 e}{r}; \int a^2 = \int 4 a^2 e.$$

Has Fermatii propositiones cum demonstratione confirmasset Hugenius, sequentia etiam de suis adjecit:

» Oportet α vel e (fig. 46) ab angulo recto B accipi, ut theoremata ista locum habeant (cum vero aliter accipiantur, vide quid eveniat in exemplo mox afferendo), quae sic quoque vera sunt, si curva CA in infinitum abeat (fig. 47) secundum asymptoton BA; sed ita ut spatium tamen infinitum CAB aequetur certo spatio, sive ut quantum libet prope ad certi spatii mensuram accedat. »

» Potest quoque curva solum incipere in D (fig. 48) ut DC sit recta linea, DA curva, et tunc DC minima omnium α . »

» Potest etiam et infinita extensio esse curvae DA (fig. 49) et simul DC recta linea. Attamen e , quae in aequatione, sunt tantum quae ex curva DA applicantur ad BA, et e , quae in rectangulo DB, vocantur E. »

» BF curva, (fig. 50) BH = e , HK = α , BD sive GF = E maxima omnium e ; DF = A maxima omnium α . Hic summa omnium $e e \alpha$, hoc est solidorum ex omnibus α in quadrata distantiarum suarum a BG, erit aequalis $\frac{1}{2} \int E^2 - \frac{1}{2} \int e^2$, — BD et BG in particulas utrumque aequales divisae intelliguntur, jamque in $\int e e \alpha$ e significant distantias ipsarum HK, seu α , a BG aequaliter crescentes, at in $\int e^2$ e significat rectas a curva BF applicatas ad BG, eamque in dictas particulas aequales iis quae in BD dividentes. Denique in E^2 , E significat rectas, quarum singulae aequales GF sive BD, maximae omnium e , quaeque sunt ipsae e usque ad DF productae. Demonstratio. Quum $\int$ omnium KL in quadr. distantiarum suarum e^2 aequetur $\frac{1}{2} \int$ cuborum applicatarum e , quae BG in particulas aequales dividere intelliguntur, sitque $\int$ omnium HL, ipsi DF seu maximae α aequalium, in quadr. distantiarum e^2 aequalis $\frac{1}{2} \int$ cuborum ex omnibus E, sequitur $\int$ omnium HK in quadr. distantiarum suarum $e e$ aequari $\frac{1}{2} \int E^2 - \frac{1}{2} \int e^2$. »

» BF curva (fig. 51) $NP = e$, $PK = a$, $NO = E$, $OF = A$. Rectae a sunt a curva BF applicatae ad NO, eamque in particulas aequales dividentes. Etiam hic $\int a e e = \frac{1}{3} \int E^3 - \frac{1}{3} \int e^3$. Sed E in E^3 significant e maximas per totum rectang. NF applicatas ad NG eamque in particulas aequales tum inter se, tum rectae NO dividentes; e vero in e^3 rursus applicatas a curva BF ad BG eamque in particulas dictis aequales dividentes. Item e in $a e e$ significat rursus distantias linearum PK ab recta NG aequaliter per particulas crescentes.»

» DQ curva (fig. 52) $NP = e$, $PK = a$, $NO = E$, $OD = A$ minima omnium a . Hic $\int a e e = \frac{1}{3} \int E^3 + \frac{1}{3} \int e^3$. Ut E in E^3 significet e maximas per rectangulum ND applicatas ad NB: e in e^3 rursus applicatas a curva DQ ad rectam BQ, eamque in aequales partes dividentes. At e in $a e e$ ut prius significat distantias rectarum a ab NQ.»

Haec quoad principia, quorum usum Fermatius latissime patere dixerat in curvarum infinitarum quadratura invenienda, cujus rei aliquot exempla profert, sed tam obscuris verbis proposita, ut haud immerito iis illustrandis operam dederit Hugenus, cujus adeo de his rebus annotationes cum lectoribus communicare lubet.

Sit curva ABN circuli quadrans (fig. 53), cujus radius AH = HN = b . Sit porro HG = CB = e , CH = a , ita ut hujus circuli aequatio fiat $b^2 - a^2 = e^2$.

» Consideretur primo AH divisa in partes minimas aequales, tunc singula quadrata ramorum BC applicata rectae AH vel ipsi aequali AV, vel alii lineae si velimus, faciunt rectas CQ, quae hic cadunt in parabola AM, cujus vertex M, axis MH. Nam si in circuli aequatione $b^2 - a^2 = e^2$, sit $e^2 = bu$, erit $b^2 - a^2 = bu$, et si $bu = bi - by$, evadet $b^2 - a^2 = bi - by$; adeo ut, si $i = b$, $a^2 = by$ parab.»

» Deinde consideretur HN divisa in partes aequales iis in quas secta fuit AH , nec referret si non exacte explerent HN , uti nunc faciunt, quia ABN ponitur quadrans circuli. Jam omnia simul rectangula ex BG in GH bis sumpta aequari scimus omnibus quadratis CB (vide supra) ac proinde omnia simul rectangula BG in GH erunt aequalia $\frac{1}{2}$ omnium quadratorum BC . Quare etiam omnia rectangula BG in GH si applicentur ad eandem AH aut aliam rectam, ad quam applicata fuerunt quadrata BC (ex qua applicatione hic natae sunt rectae GO , faciendo ut AH ad HG ita BG ad GO), erunt necessario omnes simul GO aequales dimidio omnium simul CQ , quae ex applicatione totorum quadratorum BC ad AH ortae erant, atque ita figura HON hic $= \frac{1}{2}$ parabolae AMH , sive $\frac{1}{2}$ quadrati ex AH . Etenim si rursus in circuli

aequatione $b^2 - e^2 = e^2$ ponatur $ea = bu$, sive $a = \frac{bu}{e}$, fiet haec

$$b^2 - \frac{b^4 u^2}{e^2} = e^2, \text{ sive } b^2 e^2 - b^2 u^2 = e^4, \text{ sive } b \sqrt{e^2 - u^2} = e^2, \text{ aequatio}$$

curvae HON , in qua GO seu $u = \frac{ae}{b}$. Quoniam autem $\int u = \int \frac{ae}{b}$

$$= \frac{1}{b} \int ae = \frac{1}{2b} \int e^2, \text{ adeoque } \int u \text{ in curva } HON = \frac{1}{2} \int u \text{ in curva}$$

AQM , quae est parabola, erit curva HON quadrabilis, ejusque area aequalis $\frac{1}{2}$ parabolae AQM .

Animadvertit autem Hugenus curvam HON , cujus aequatio est $b^2 e^2 - b^2 u^2 = e^4$, etiam a Huberto Huyghenio Zelando fuisse examinatum, eamque ejusdem generis nec tamen prorsus eandem esse ac illam, de qua alibi egerat, nempe quae aequationem habet $y^4 - 8a^2 y^2 + 16a^2 x^2$, cujus quadraturam olim invenerat Leibnitius, quam tamen quadraturam, ut addit Hugenus, apud Fermatium reperire potuit.

Alterum exemplum, a Fermatio l. l. p. 54 exhibitum et a Hugenio

illustratum, agit de quadratura curvae CBA (fig. 54) ejus aequatio est $b^3 = aae + dba$. Duce Fermatio sic ratiocinatur Hugenus.

» Sit in aequatione proposita $oo = be$, sive $e = \sqrt{be}$, et $\frac{oo}{b} = e$, evadet haec aequatio $b^4 = aao + dbbo$, quae pertine-

bit ad curvam KHG, in qua applicatae o sunt mediae proportionales inter b et e , dabiturque summa omnium e , si detur summa quadratorum oa . Sit porro in aequatione ultima $ao = bu$ sive $\frac{ao}{b} = u$, mutabitur haec aequatio in sequentem $bb - oo = uu$, quae

pertinet ad circuli circumferentiam GLM. Ergo omnia o habentur, data quadratura circuli. Nam summa quadratorum eo scimus aequari duplae summae rectangulorum oa . Ergo et duplae summae rectangulorum bu , quia $bu = oa$. Si ergo applicentur omnia quadrata oo ad b , itemque applicentur omnia rectangula bu ad b , fient lineae, quarum summa priorum $\frac{oo}{b}$ sive e , erit dupla summae

posteriorum quae sunt u . Atqui omnes e faciant spatium infinitum CBADEF, si nempe ductae intelligantur in unam particularum aequalium in quas DF infinita secta est a rectis e . Omnes item u faciant quadrantem circuli DGM, ductae nempe in unam particularum aequalium in quas secta est DG a rectis u , quae particulae prioribus aequales ponuntur. Est ergo spatium infinitum CBADEF duplum quadrantis DGM, adeoque quadratura ejus pendet a quadratura circuli. »

» Dico (sic pergit Hugenus) et spatium ABPA esse duplum spatii GNL. Sunt enim omnia quadrata oo solidi EHGD ad omnia quadrata partium o in rectangulo EN, sicut omnes e in spatio BADE ad omnes partes linearum e in rectangulo BD. Itaque solidum ex EHGD circa ED est ad cylindrum ex rectangulo EN

circa eandem ED, ut spatium EBAD ad rectang. BD. Et dividendo, solidum ex EHGD ad solidum ex HNG circa eandem ED, ut spatium EBAD ad spatium BPA. Sed solidum infinitum ex KGDF est ad solidum ex EHGD ut spatium infinitum FDAC ad spatium EBAD. Ergo solidum infinitum ex EHGD [lege: KGDF] ad solidum ex HGN, ut spatium infinitum FDAC ad spatium BPA. Sed solidum infinitum ex KGDF est ad solidum ex HGN ut omnia ao in spatio infinito KGDF ad omnia ao in spatio HGN, hoc est ut omnes u in spatio DMG ad omnes u in spatio LGN. Ergo ut quadrans DMG ad portionem LNG, ita spatium FDAC ad spatium BPA.

Tertium denique exemplum, ex eodem Fermatii opere p. 55 et 56 petitum, hoc est:

» Aequatio curvae OC (fig. 55) quae est circuli circumferentia, sit $bb - aa = ee$. PQ sunt e , PA vel QR sunt a . AO radius $= b$. Quaeritur summa cuborum e .

» Si haberem, « inquit Hugenus, » summam omnium eee , haberem et summam omnium e^3 , quia $\int eea = \frac{1}{2} \int e^3$. Sit $bb o = aee$,

unde $\frac{bb o}{ee} = a$, et $o = \frac{aee}{bb}$. Hinc curvam secundam construo AHC,

in qua AL sunt e , LM sunt o , cujus curvae aequatio fit, substituto in aequatione valore a , $bb - \frac{b^4 oo}{e^4} = ee$, sive $b^2 e^4 - b^4 oo = e^6$.

In hac curva jam sciri deberet summa omnium o . Sit $eu = bo$, Si jam $\int eu$ haberem, etiam $\int bo$ haberem ideoque et $\int a$. Fit autem nunc

curva $bb ee - e^4 = bb uu$, quam construo ex eo quod $u = \frac{bo}{e}$; sumtis e ut ante in AC aequalibus. Est autem haec curva ABC (LA, e , LQ, u) eadem quae in exemplo superiori pag. 150, ut patet ex aequatione. In hac curva si haberem summam omnium e quadr, (quae rectam AD aequaliter

aequaliter secare jam debent) in spatio ABD , itemque $\int e$ quadr. quae in spatio $ADBC$, haberem et eorum differentiam, quae aequalis est omnibus eu , unde et $\int bo$ haberem. Non enim hic omnia e quadr. $= \int 2eu$, sed differentia, qua omnia quadrata rectarum e , quae sunt in spatio $CBDA$ superant omnia quadrata rectarum e quae sunt in spatio BAD , est aequalis $2\int eu$, quod notandum. Omnia eu est solidum ex figura ABC circa AD . Hoc autem habetur aequale dimidio ex omnibus e quadratis; hoc est ex solidis ex ABD et $ACBD$ circa AD . Est enim horum differentia, hoc est summarum dimidiorum quadratorum ee . Pono $ee = by$, unde $y = \frac{ee}{b}$, et hinc quartam curvam invenio AGF , quae est circuli circumferentia, ejusque aequatio $by - yy = uu$. Ergo, quia singula by sunt $= ee$, erit summa ee ad summam differentiarum ee ut summa by ad $\int$ differentiarum by , hoc est ut rectangulum AE ad semicirculum AGF . Et summa ee ⁽¹⁾ ad dimidiam summam differentiarum ee , ut summa by , hoc est ut rectangulum AE in altitudinem b , ad dimidiam summam differentiarum by , hoc est ad quadrantem KGA in altitudinem b . Ergo quadrans KGA in altitudinem b erit aequalis summae omnium e in u ; ergo et summae omnium bo , quia aequalia posuimus $eu = bo$. Ergo spatium $AHC =$ quadranti KGA ; quod notandum. Sed $bb o$ erat $= aee = \frac{1}{3}e^3$. Ergo quadrans KGA in altitudinem b insuper ductus denuo in b , aequabitur $\frac{1}{3}e^3$. Hinc vero invenitur centrum gravitatis unguulae super quadrante AOC , abscissae per AO angulo semirecto.

(1) In margine annotavit Hugenius: nota hic ad summam omnium ee inveniendam in curva ABC , debuisse duos istas e ita ut rectam AD in partes aequales dividerent. Neque aliter ad curvam ABC alia statui poterat ad rectam AD , in qua y essent ut ee . Ex duabus autem e , quae sunt ST , SV , sunt duae y , quae sunt SX , SX .

Oportet enim eam in brachium suum super A O ductam aequari omnibus sémiquadratis super lineas e in ungula existentibus ductis in sua brachia super A O, hoc est in $\frac{2}{3} e$; unde oritur $\frac{1}{3} e^3$ pro producto unguulae dictae in brachium suum. Erat autem et solidum ex quadrante K G A in b ductum $= \frac{1}{3} e^3$. Itaque solidum hoc suspensum in puncto C brachii C A aequiponderat sive aequale gravitatis momentum habet super recta A O, ac ungula ante dicta. Quare ut ungula ad solidum illud, ita b ad brachium unguulae super A O. Est autem ungula $= \frac{1}{3} b^3$, ut aliunde notum, et solidum dictum $= \frac{1}{3} b b q$, si arcus G A sit q , nam K A $= \frac{1}{2} b$. Itaque eorum ratio quae $4b$ ad $3q$. Ergo ut $4b$ ad $3q$ ita b ad $\frac{3}{4} q$, quae erit longitudo brachii unguulae in rectam A O: quod et aliunde scimus ita se habere. »

His praemissis, intellectu haud erit difficile, qua ratione Hugenus curvarum quadraturas aliaque hujus generis invenerit; quod quo luculentius pateat exempli causa afferre lubet quadraturam Folii Cartesii, quam, ut ipse annotavit, die 21 Nov. 1692 e tenebris eruit.

Sit itaque (fig. 56) A B E Δ A dictum folium, cujus aequatio $e^3 + u^3 = e u b$, et diameter A E $= \frac{1}{2} b \sqrt{2}$, ita ut A D $=$ D E $= \frac{1}{2} b$. » Haberm, » inquit Hugenus, » hujus curvae quadraturam, si cognoscerem summam omnium u seu F G in spatio A B E D, nam, ablato triangulo E A D, fiet A B E hoc est $\frac{1}{2}$ spatium folii A B E Δ A.

Sit $b b u = a e e$, unde $a = \frac{b b u}{e e}$, et hinc alia curva construatur K I,

cujus aequatio ex priori data erit $\frac{b^5 a - b^6}{a^3} = e^3$. Si haberm $\int a e e$, haberm et $\int b b u$, et hinc $\int u$. Sed $\int a e e$ est $\int \frac{1}{3} e^3$, ergo opus habeo $\int e^3$ in nova curva.

Sit $e^3 = b^3 v$ adeoque $\frac{e^3}{b^3} = v$, et construatur curva Y H M, cujus pars Y H recta parallela A L.

Sit $b^2 v = b b i - b b y$; sive, quoniam $b^2 v = e^2 = \frac{b^5 a - b^6}{a^3}$, erit

$b b i - b b y = \frac{b^5 a}{a^3} - \frac{b^6}{a^3}$; itaque, si $b b i = \frac{b^5 a}{a^3}$, erit $b b y = \frac{b^6}{a^3}$; prior

harum aequationum fit $a a i = b^3$, estque hyperboloides quadrabilis O P S, cujus spatium infinitum K P S θ = rectang. P D. Altera vero fit $a^3 y = b^4$, ejusque curva O Q R etiam hyperboloides quadrabilis, cujus spatium infinitum K Q R θ = $\frac{1}{2}$ rectangulo Q D.

Ex e jam inveniuntur v , ipsis e in directum adjunctae, deinde summa omnium v invenitur, in qua computantur primo omnes v in rectangulo Y A L H, deinde omnes M N, incipiendo ab L H, quia K D est prima ac minima omnium a . Atque istae M N seu v aequantur porro singulae rectis R S inter hyperboloides O P S, O Q R, interceptis, ac sibi respondentibus. Incipiunt autem hyperboloides a puncto O, angulo quadrati O D, cujus latus b . Estque spatium infinitum inter eas interceptum P Q R S = spatio infinito H L N M. Pro omnibus v igitur habemus omnes quae sunt in rectangulo A H et in spatio infinito Q P S R, quod aequale invenitur rectangulo T K demto rectangulo Q X.

Sed quia $b b v$ est $= e^3$, hoc est $= 3 a e e$, hoc est $= 3 b b u$; erunt omnia $b b v$ = ter omnibus $b b u$, et $\frac{1}{3}$ omnium $b b v$ = omnibus $b b u$. Ergo $\frac{1}{3}$ omnium v = omnibus u , quae facere intelliguntur spatium A B E D, ductae nempe in unam aequalium partium, in quas ipsae u dividunt rectam A D, sicut omnes in infinitum v in aequalem priori particulam ductae, in quas v vel e dividunt rectam infinitam A L N, faciunt spatium infinitum A Y H M N A, hoc est $\square K T - \square Q X + \square A H$. Itaque horum tertia pars, hoc est $\square V X + \frac{1}{3} \square A H$ sive V K, hoc est $\frac{1}{3} \square V K$ aequabuntur spatio A B E D. Sed $\square V K = \frac{1}{4} b b$; ergo spat. A B E D $= \frac{1}{12} b b$, et demto triangulo A D E $= \frac{1}{2}$ sive $\frac{1}{24} b b$, fit spat. A B E $= \frac{1}{12} b b$.

Quadratura autem universalis facile invenitur. Est enim $KP = \frac{e^4}{b u u}$,
 $DK = a = \frac{b b u}{e e}$; hinc $KP \cdot DK = \text{spat. infin. } KPS\theta = \frac{b e e}{u}$, ejusque
 pars tertia $= \frac{b e e}{3 u}$.

Similiter $KQ = \frac{e^4}{b b u}$, $DK = a = \frac{b b u}{e e}$, hinc $KQ \cdot DK = \text{spat. infin.}$
 $KQR\theta = \frac{e^4}{2 u u}$; ejusque pars tertia $= \frac{e^4}{6 u u}$.

Porro: $AY = \frac{e^3}{b b}$, $DK = a = \frac{b b u}{e e}$; ergo rectang. $AH = e u$, ejusque
 pars tertia $= \frac{e u}{3}$.

Est autem spat. $AB\delta = \frac{1}{3} \text{ spat. } KPS\theta - \frac{1}{3} \text{ spat. } KQR\theta + \frac{1}{3} \text{ rect. } AH$

$$= \frac{b e e}{3 u} - \frac{e^4}{6 u u} + \frac{e u}{3} \dots \dots \dots (1)$$

triang. $A\beta\delta = \frac{1}{2} e e$.

$$\text{Ergo spat. } BA\beta = \frac{b e e}{3 u} - \frac{e^4}{6 u u} + \frac{e u}{3} - \frac{1}{2} e e$$

$$\text{ejusque duplum, seu spat. } A\beta B + A\beta\Delta = \frac{2 b e e}{3 u} - \frac{e^4}{3 u u} + \frac{2}{3} e u - e e$$

$$\text{Cui si addatur triangulum } B\beta\Delta = \frac{1}{2} u u - e u + \frac{1}{2} e e$$

$$\text{habebimus quadr. univ. spatii } ABA = \frac{2 b e e}{3 u} - \frac{1}{3} \cdot \frac{e^4}{u u} + \frac{1}{2} u u - \frac{1}{2} e u - \frac{1}{2} e e$$

Si autem in aequatione (1) pro $\frac{e^4}{6 u u}$ substituatur ejus valor ex
 aequatione primitiva $u^3 + e^3 = b e u$ ductus, fiet

$$\text{spat. } AB\delta = \frac{1}{3} \cdot \frac{b e e}{u} + \frac{1}{2} e u.$$

$$\text{cui si subtrahatur triang. } A\beta\delta = \frac{1}{2} e u.$$

$$\text{supererit spatium sive segmentum } A\omega BA = \frac{1}{3} \cdot \frac{b e e}{u}.$$

Ut porro quadraturam inveniret spatiorum, quae inter curvae ramum $A \pi f$ (fig. 57) ejusque asymptoton $\zeta \Sigma \eta \psi$ interjacent, Hugenus primum aequationem

$$e^3 + u^3 = e u b$$

in aliam mutat, cujus radices sunt eadem, sed negativae, eoque obtinet

$$u^3 - e u b - e^3 = 0 \dots\dots\dots (A)$$

atque in hanc dein idem applicat ratiocinium, quod supra, cum de aequatione

$$u^3 - e u b + e^3 = 0.$$

ageretur, exposuimus. Itaque, posito $\frac{b^2 u}{e^2} = a$, fit aequatio (A)

$$e^3 = \frac{b^6 + a b^5}{a^3}.$$

quae pertinet ad curvam $K I$; quae rursus, si $e^3 = b^2 v$ ponatur, exhibebit aequationem curvae $Y H M$,

$$v = \frac{b^4}{a^3} + \frac{b^3}{a^2}$$

vel, si $v = i + y$ ponatur, habebimus ad determinandas hyperboloides $O P S$, $O Q R$, aequationes:

$$a^2 i = b^3, \quad a^3 y = b^4.$$

Summa itaque omnium v hoc loco non erit, ut supra, aequalis differentiae, sed *summae* omnium i et omnium y . Qua tantum re cum praesens casus a praecedenti differat, sponte patet spatium $A f D$ universe exprimi hac aequatione:

$$\text{sp. } A f D = \frac{b e e}{3 u} + \frac{e^4}{6 u^2} + \frac{e u}{3}$$

vel, si pro $\frac{e^4}{6 u^2}$ substituatur ejus valor $\frac{e u}{6} - \frac{e^4 b}{6 u}$ ex aeq. (A)

petitus, obtinebimus:

$$\begin{aligned}\text{spat. } A f D &= \frac{1}{6} \cdot \frac{b e^2}{u} + \frac{1}{2} e u \\ \text{est vero } \Delta A D f &= \frac{\frac{1}{2} e u}{\frac{b e^2}{u}} \\ \text{ergo spat. } A \pi f A &= \frac{1}{6} \frac{b e^2}{u}.\end{aligned}$$

Est porro $A \phi = \frac{1}{3} b$, nam $\Sigma A = \frac{1}{3} A E$.

$$\begin{aligned}\text{ergo } A \phi + A D &= \frac{A D = e}{\phi D = \frac{1}{3} b + e} \\ \phi D &= \frac{1}{3} b^2 + \frac{2}{3} b e + e^2 \\ \Delta \phi D \psi &= \frac{1}{18} b^2 + \frac{1}{3} b e + \frac{1}{2} e^2 \\ \text{at } \Delta \phi A \eta &= \frac{1}{18} b^2 \\ \text{ergo spat. } A \eta \psi D &= \frac{1}{3} b e + \frac{1}{2} e^2.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Est autem spat. finitum } A \eta \psi f &= \text{sp. } A \eta \psi D - A \pi f D \\ &= \frac{1}{3} b e + \frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{6} \cdot \frac{b e^2}{u} - \frac{1}{2} e u.\end{aligned}$$

Si vero fiat $e = \infty$, erit $u = e + \frac{1}{3} b$

adeoque $\frac{1}{2} e u = \frac{1}{2} e^2 + \frac{1}{6} e b$.

Quo valore in ultima aequatione substituto, erit

$$\begin{aligned}\text{spat. infinitum } A \eta \psi f &= \frac{1}{3} b e + \frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{6} \cdot \frac{b e^2}{u} - \frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{2} e b \\ &= \frac{1}{3} b e - \frac{1}{6} \cdot \frac{b e^2}{u} \\ &= \frac{1}{3} b e - \frac{1}{6} \cdot \frac{b e^2}{e + \frac{1}{3} b} \\ &= \frac{b e^2 + \frac{1}{3} b^2 e - b e^2}{6(e + \frac{1}{3} b)} \\ &= \frac{\frac{1}{3} b^2 e}{6(e + \frac{1}{3} b)}.\end{aligned}$$

Sed, quoniam $e = \infty$, erit $e + \frac{1}{3} b = e$, adeoque fit

$$\text{spat. infin. } A \eta \psi f = \frac{1}{18} \cdot b^2$$

$$\text{at vero } \Delta A \Sigma \eta = \frac{1}{18} b^2$$

$$\text{ergo spat. inf. } A \Sigma \psi f = \frac{1}{18} b^2$$

$$\text{et spat. infin. } \gamma A f \psi \Sigma \zeta \gamma = \frac{1}{6} b^2 = \text{folio } A B E A A,$$

§ XVI.

Ad pag. 161 verba: *je vous prie très humblement d'envoyer la feuille cy-jointe cet.* Coll. pag. 298 extr.

Scheda, quam h. l. Hugenus significat, hic a nobis non describitur, quoniam quae ea continentur in Actis Lipsiensibus, atque hinc in Hug. Opp. Omm. T. I. p. 516. fuere edita. Ultima tamen hujus scriptiunculae verba hic repetemus, quia mentionem faciunt novissimae Hugonii in horologiorum cursu moderando inventionis jam supra a nobis memoratae. Sunt haec verba sequentia:

» Interim aliam quamdam utilissimam curvam nuper mihi repertam Geometrae sciant, cujus opera horologiis motus aequalis conciliatur, atque ejusmodi ut maris agitatione nequaquam turbari aut imminui queat; quod in pendulis nostris hactenus usurpatis non satis caveri potuit. Adeo ut nova ac certior spes nunc affulgeat, perficiendi longitudinum inventi. Curva haec formatur:

a a b b c d e e e e f i i i i l l l m m m n o r r s s t t u u x.»

De hac Hugonii inventione nihil unquam, quantum scio, fuit pervulgatum. Gratissimum itaque accidit, cum in ipsa scriptiunculae ad Leibnitium missae autographa, aenigmati, quod descripsimus, solutionem invenire mihi contigit. Quaecumque si jugantur quae, utut imperfecta, de Hugonii meditationibus ad hoc argumentum pertinentibus in ipsius Adversariorum libro H. p. 172 sqq. et I. p. 91: sqq. reperiuntur, aliquatenus intelligere poterimus quae novae meliorisque horologii conditionis fuerint principia.

Dictus gryphus sequenti modo explicatur :

Flexilis ambitum cum linea deserit orbem ,

nobisque indicat methodum curvae delineandae, quae tamquam fundamentum hujus inventi habenda est.

Cum enim Hugenius intellexisset horologia sua pendulis instructa maris agitationes absque incommodo ferre non posse, inquisivit an non his pendulis alius apparatus posset surrogari, cujus idem foret usus, sed qui dicto vitio non laboraret.

Ac primum quidem incidisse videtur in veterem cogitationem motum isochronum efficiendi, quam A°. 1683, in Adv. Libro F. p. 181 his verbis nobis descripsit.

» Aliud genus motus isochroni (fig. 58). Orbis A B super axe horizontali mobilis, affixis ponderibus aequalibus C, D. Orbi filum circumjectum, cui appenduntur catenulae aequales E F, G H, planum H F semper contingentes. Indito motu, crescit pondus catenulae alterius super reliquam, idque in eadem ratione qua circumferentiae orbis versatur. Unde incitatio pro ratione distantiae a quiete, atque hinc recursuum minorum majorumque aequalitas. Idem fiet si loco catenularum appensi fuerint cylindri tenues liquido immersi, ut argento vivo vel oleo.

Sed motus ponderum super axe horizontali non aequè liber est, ac in suspensione.

Posset orbis gravitans esse horizontalis et ex filo pendens inferne axem foramini insertum habens, fila vero bina axi circumvoluta ac per orbiculos ad cylindros euntia, de quibus dictum. »

Hoc enim principio utens, Hugenius 31 Jan. 1693, invenit apparatus quem vocavit *Balancier marin parfait*, de quo plura
ibi

ibi loci conscripsit, sed quibus, ut ipse testatus est, multo praestantius est illud, quod ejusdem libri pag. 180 annotaverat.

Continent ista pagina 180 et duae sequentes figurarum nonnullarum delineationes, porro descriptiones et demonstrationes, quae spectant *Libram Isochronam, praecedenti meliorem, et inventam 6^o Martii 1693.*

Libra haec constat (fig. 59) annulo metallico, in centro super axe perfecte mobili. Ex eodem hoc centro procedunt duae laminae metallicae, quarum extremitates secundum legem quandam sunt incurvatae. In puncto C suspenditur filum vel linteum quam maxime flexile, cui annectitur pondus. Jam vero, si laminarum curvado ea sit, quae oritur ex evolutione circuli circumferentiae, libra oscillationes suas peraget isochronas, et horologii pendulo poterit substitui.

Hoc est Hugonii inventum, versu supra citato expressum, quod paucis jam ipsius verbis illustrare juvat.

Ac primum quidem videamus de motus aequalis demonstratione, quam sic concinnavit auctor:

» Si (fig. 60) in arcu CH quaelibet partes accipiantur CD, DG, GE, et a punctis D, G, E evolvantur fila, circumferentiae applicata, ut describantur ex evolutione lineae DQ, GP, ES, usque in horizontalem CR, apparet, cum C punctum conversione axis pervenerit in D, (quia CR ad omnes descriptas curvas normalis est) tunc pondus appensum tracturum per QM perpend.; cum vero C in G, trahet per PA. Sunt autem momenta trahentis sicut distantiae PC ad QC, atque ita quoque arcus peragendi a circulo libratorio, nempe GC, DC; ergo semper momenta impulsus erunt ut spatia motu circulari peragenda usque ad punctum C, ubi impulsus ad nihilum perducitur, quare tempora quarumlibet librationum aequalia erunt.»

Huic demonstrationi sequentia etiam adjunxit:

» Quatenus pondus A (fig. 59) pendens ex taeniola AC aequaliter

ponderat, erit motus circuli DE isochronus. Pendet taeniola inter particulas binas curvae, quae nascitur ex evolutione circumferentiae CGH, (fig. 60) cujus radius CK, K centrum motus. Caput taeniolae A movetur in parabola, cujus vertex L, axis LC, latus rectum = tertiae proportionali duarum CL, CR, quae aequalis 2CK. Nam $M\beta = DQ$, $A\gamma = GP$, quia ex evolutionis natura crescunt DQ, GP uti quadrata CQ, CP.

Spatium CHR erit $= LR\zeta$, hoc est $\frac{1}{2} \square C\zeta$, sive $\frac{1}{2} \square$ ex HR in CR, vel HR in arcum CH. »

De apparatus effectu sequentia annotavit:

» Ces cornes C (fig. 61) avec le poids A corrigent tellement l'inégalité des balancemens de la roue, que quoyqu'on ajoute du poids à sa circonference, sans rien changer au poids A, on les aura isochrones; et de mesme, si on ajoute ou oste du poids A, laissant la roue comme elle est, ce qui est bien remarquable et bien commode. Il faut seulement que les balancemens soient assez lents, pour que le ruban CA pende tousjours perpendiculaire, parce qu'autrement le poids A ne tireroit pas également. Il n'importe point que le ruban CA s'allonge. »

» Si on suppose que la roue soit sans poids, alors le poids A fera comme un pendule simple de la longueur $KG + CA$. Potest distantia KG pro arbitrio sumi, dummodo curvatura cornuum C sit ex evolutione circumferentiae, cujus semidiameter KG. »

» Inaequalitas non aliunde contingere potest, quam si axis rotae DB non maneat horizonti parallelus, tunc enim minus gravitat pondus A. »

» Vel si atteratur ac diminuatur imum in axe rotae. Sic enim evaderet centrum gr. annuli humilius puncto suspensionis. Sed hoc aliquot mensium spatio fieri non potest. Eoque minus quod non atteritur axis rotae super plana superficiem, sed volvitur. At in

horologio pondere agitate, quod amplius 35 annis usum praebuit, non potui animadvertere axem rotae infimae, cui pondus movens incumbit, quicquam amisisse, etsi hic axis continue fricetur interiori superficie foraminis. »

Reliqua, quae adjecit auctor, spectant partium constructiones et dispositiones, quibus rotae, horologio applicatae, motus liberrimus possit conciliari. At vero ipsam rotam mox sustulisse videtur, et in ejus locum substituisse virgam, in utraque parte extrema ponderibus aequalibus oneratam, in media vero ejusmodi apparatu instructam, qualis in ipsa rota inveniebatur, ut sc. motus virgae oscillatorius isochronus evaderet. Id enim tum ex horologiorum delineationibus, in reliquis Libri H. paginis inveniendis apparet, tum ex sequenti demonstratione, quae talis virgae motum isochronum esse evincit.

» Constat quidem librationes ponderum G, E, (fig. 62) virgae absque gravitate affixorum isochronas fieri, ob pondus C inter curvas suspensum. Sed an idem fit additis aliis ponderibus F, D? Omnino. »

» Quaeramus primum, datis ponderibus E, G, singulis $=a$, ponderibus D, F, singulis $=b$, distantis A E, A G $=c$, distantis A D, A F $=d$, quanta deberent poni pondera in locum extremorum E, G, ut aequae celeri motu impellatur libra ex binis istis composita, atque altera ex quaternis E, G, D, F. »

» Ponatur pondus E, impulsus per arcum E H, acquisivisse celeritatem, qua ascenderet ad altitudinem e . Ergo pondus D eam cele-

ritatem habebit qua ascendat ad $\frac{d d e}{c c}$. Ergo $a e + \frac{d d e b}{c c} = e x$,

posito x pro pondere ponendo in locum E vel G. Debet enim potentia vel pondus C certa altitudine descendendo peracta, eum motum imprimere partibus librae, qualitercunque compositae, ut a libra solutae (atque etiam ipsi C) motumque sursum convertentes, tantundem gravitatis [centrum] ascendat, quantum descendit depresso pon-

dere C; ex axioma nostro: vires corporum non interire nisi edito effectū. Atqui x quoque acquirit celeritatem qua ascendat ad e altitudinem. Ergo $a + \frac{ddb}{cc} = x$. Cum ergo tali pondere $x = a + \frac{ddb}{cc}$

posito utrimque in extrema virga, fiat motus librae impressus actione ponderis C aequae celer ac librae ex ponderibus E, D, F, G, compositae, idque emenso arcu quovis EH, sequitur totas utriusque librae librationes iisdem temporibus absolvi. Sunt autem librae ex ponderibus binis x compositae librationes omnes isochronae. Ergo et librae compositae ex E, D, F, G. Ergo qualitercunque composita libra, dummodo aequilibrata, aequalia tempora oscillationibus signabit opera ponderis C. »

» Praestat longe ut gravitas librae tota, quantum potest a centro removeatur. Fit enim levior, manente oscillationum tempore. Et centrum gravitatis, ex libra et pondere C tamquam in B posito compositum, fit ampliori distantia ab A. »

» 4 Librae in D idem tempus producant quod 1 libra in E distantia dupla. »

Quod vero ad commoda attinet, quibus haec sua libra isochrona pendulo praestaret, de his ita loquitur:

» Un des grands défauts de l'horloge à pendule suspendue dans le vaisseau estoit que la force du pendule causoit un petit mouvement à toute l'horloge, et cela plus ou moins, selon la liberté des axes de chassis de fer, d'où naissait de l'inégalité aux heures. Cela n'aura point lieu icy, quand mesme la boule A, qui est transportée d'un costé à l'autre, produiroit quelque peu de mouvement à l'horloge. Car le balancier fait ses tours égaux quoyque son centre change de place. »

» Outre cela on ne pouvoit se servir dans le vaisseau que d'un pendule court de 10 ponces ou environ, mais de cette nouvelle maniere

on peut faire les balanciers de 2, 3 ou 4 pieds de diametre, et avec des balancemens, de 2, 3 ou 4 secondes. Et par consequent faire ces horloges si justes qu'on veut, puisque la justesse depend de la grandeur et du poids des balanciers, car par là la roue de rencontre a moins de force à rendre les balancements inégaux, et la resistance de l'air agit aussi moins considerablement sur un balancier pesant. »

Neque tamen his contentus fuit Hugenus, sed inventum suum magis magisque perficere summopere studuit. Testis sit alia, quam construxit, libra isochrona, cujus descriptio et delineatio, in Libro Adv. I. p. 99. reperiunda, haec est :

» Pendulum compositum ex ponderibus N, N (fig. 63) in recta per punctum suspensionis C aequaliter distantibus, et ex pondere P, duobus simul N, N aequali, affixoque in virga perpendiculari CPD, in B, erit isochronum pendulo composito ex ponderibus binis Q, Q, ipsis N, N aequalibus, affixis in brachiis BQ horizontalibus, quorum longitudo ipsis CN aequalis sit, manente suspensione ex C. »

» Pendulum simplex utrique isochronum erit CD, cujus pars BD tertia sit proportionalis duabus CB, BQ. »

» Nota. (fig. 64) EB est aequalis arcui DB, et percurritur a pondere P² (quatenus movetur horizontaliter) proportionaliter ut partes arcus DB. Ergo eadem vi, sive descensu ponderis P opus esset ad conciliandam eandem celeritatem pendulo composito ex N, N et P in B affixo, atque ex N, N et P inter curvas suspenso; considerando tantum motum horizontalem ponderis P. Sed magis descendit pondus P posteriori casu, quia curva DE longior recta DH. Itaque hinc fit ut paulo celeriore motum accipiat pendulum ex N, N et P pendente compositum quam ex NN et P in B fixo. Quod ita esse constat ob majores semper distantias rectae EP² quam DH a perpendiculo CB. »

» Sicut pendulum ex N, N et P appenso inter curvas nostras helicoides efficit pendulum isochronis oscillationibus, suspensum ex C . Ita quoque ex C eodem suspensum pendulum, ex solis Q, Q ponderibus inter similes curvas utrimque pendentibus, isochronas oscillationes habebit et alterius illius penduli aequales. Hoc modo carere possumus gravitate ponderis P . »

» Demonstratio aequalitatis penduli $Q C Q$ hinc petitur, considerando in utroque pendulo duos motus, quorum alter est ponderum Q, Q et N, N , quatenus circulariter moventur. Qui motus utrobique aequales sunt. Ut intelligitur mota recta CB in CD , unde N, N jam in N^2, N^2 et Q, Q in Q^2, Q^2 ; sed ipsa pondera Q, Q jam quasi essent in G et F punctis curvarum sive cornuum, quae sunt necessario in recta per E ducta et aequidistante $Q^2 Q^2$, quae FEG itaque et rectae $N^2 N^2$ parallela est. »

» Centrum gr. ponderum $q q$, quod in P^2 et per $E P^2$ agere censendum, agit vi descensus sui $= BV$ in rectam CD , (hoc est ad convertendum GF , ponderibus $q q$ oneratam ex situ GF in $Q Q$,) et ad movendum pondus P motu horizontali, quanta est distantia EB . »

» Similiter vero centrum gravitatis ponderis P^2 per eundem $E P^2$ agit in rectam CD ad transponendum $N^2 N^2$ in NN (nam ipsa pondera $N^2 N^2$ hic nihil juvant) et se ipsum ab E in B . »

» Agunt ergo in aequalia et eodem modo. Unde et eosdem motus producere debent. Atqui pendulum NNP est isochronum, ergo et pendulum QQ . Descendit autem centrum gravitatis ponderis P^2 per parabolam EV ut demonstravi Lib. H. p. 180. » (Vide supra p. 162.)

» Egregium hic » ita pergit noster » quod pondus brachiorum ipsius librae non impediunt quin reciprocationes fiant isochronae; faciunt enim lentiores tantum. Atque ita quoque quodcumque corpus adjungitur, dummodo habeat centrum gr. in C puncto suspensionis librae. »

Haec praecipua sunt, quae in extremo vitae suae tempore ad horologiorum motum moderandum nova invenit Hugenus; reliqua enim quae hac de re supersunt fragmenta admodum imperfecta hic describere minus videtur necesse, cum ex iis quae retulimus satis appareat, quam prioris sui penduli partem inprimis corrigendam esse putaverit, et quomodo insigni ejus defectui medelam afferre conatus fuerit. Ista nempe horologii inaequalitas, quae ex mutua rotarum et penduli actione oritur, virum sagacissimum non latuit; ejusque vincendae gratia apparatus excogitavit, cui, salvo oscillationum isochronismo, minus esset a causis noxiis timendum. Quam difficile autem sit eas aut evitare aut tollere, continua docuit insequentis seculi experientia; quamobrem non possumus non Hugenum felicem praedicare qui jam eo rem perducere potuerit, ut novum suum horologium cum alio, pendulo 3 pedum instructo, motum haberet per 5 aut 6 dierum intervallum, perfecte conspirantem. (Vid. Fasc. I. p. 177 et 318.) Cujus rei in fidem hoc loco exhibebimus horum instrumentorum comparisonem, qualem eam ab ipso Hugenio in Advers. Libro I. pag. 108 et sqq. descriptam invenimus.

Vrijdag	16 April	's avonds ten	8 ^u 35' 0"	gelijk geset.
	17	's morg. ten	8 ^u 45' 0"	balans 18" voor.
	eod.	's av.	8 ^u 42' 0"	» 33" »
	18	m.	8 ^u 30' 0"	» 52" »
	eod.	a.	8 ^u 30' 0"	» 71" »
	19	m.	8 ^u 44' 0"	» 90" »
Maand.	19 Apr.	's avonds ten	6 ^u 0' 0"	gelijk geset.
	20	's morg. ten	9 ^u 0' 0"	balans 2" voor of niets, want op 2 seconden kan men op de wijzer van 't pendulum niet vast gaan.
	eod.	a.	9 ^u 20' 0"	balans 1" voor.

	21 Apr.	m.	10 ^u 18' 0''	balans 0'' voor, dat is beide weer gelijk. Een pond gewicht bij gedaan. De balans wierd een weijnigh langsaemer.
	21 »	a.	5 ^u 48' 0''	Boxhoorns oversien etc. gelijk geset nadat de schuiflooden verset had.
	22 »	m.	10 ^u 26'	balans 9'' voor of 8''.
	22 »	a.	5 ^u 48'	balans 12'' voor in 24 uren. De balans gingh van selfs wat ruimer, het weder wat warmer.
	22 »	a.	7 ^u 0'	gelijk geset en 1 pond gewicht bij gedaan.
	23 »	m.	9 ^u 0'	balans 0'' voor.
	23 »	a.	7 ^u 0'	bal. 7'' voor, most 12'' geweest zijn. Ergo niet genoeg gecorrigeert door de boxhoorns.
Sat.	24 »		2 ^u 10'	gelijk geset. Horologie beter vast geset. De boxhoorns verbogen.
	25 »		2 ^u 0'	balans 2½'' achter. Een pond gewicht bij gedaan. Bevond dat de balans 1'' in een uur won. Ergo al te veel gecorrigeert door de boxhoorns. Deselve weer nae een nieuwe helix verboghen.
	25 »		6 ^u 10'	gelijk geset, met ordinaris gewicht.
	26 »		11 ^u 30'	balans 10'' achter in 17 ^u 20''. Een pond gewicht bij gedaen ten 11 ^u 40'. Vond dat de balans in een uur meer als 2'' verloor, daar te voren geen 1'' verloor. Ergo te weijnigh gecorrigeert door de boxhoorns. Ick hadde wat toegegeven in 't opensetten derselve. Geloof dat wel zoude zijn indien men se de rechte figuir van de helix conde geven. Doch het is niet licht die juist te treffen. Men soude met een schroefje dezelve genoegsaam op haar rechte wijdte kon nen brengen.

27 Apr.

27 Apr.	m.	10 ^u 4'	balans 64'' achter, dat is bijna 2½'' in een uur.
27 »	m.	10 ^u 34'	gelijk geset. Een pond gewicht bij 't pendulum gedaen om te sien of het die proef kan uijtstaen.
28 »	m.	9 ^u 0'	balans 68'' achter in 22 ⁿ 26', dat is seer nae 2½'' in een ure, soodat het pendulum die proef wel uijtstaat.
28 »	m.	11 ^u 14'	gelijk geset, naedat de boxhoorns op 't netate verboghen hadde zoo ieder apart als te samen met het modelletie.
29 »	m.	11 ^u 20'	balans 13'' achter in 24 uren. Bij gedaen 1 pond gewicht. Won 1'' in een ure. Ergo te veel gecorrigeert.
30 »		9 ^u 37'	gelijk geset naedat de boxhoorns ietwes geopent had, nae de passer en 't modelletie, en met het pond gewicht bijgedaan, en sonder 't selve seer nae gelijcke gangh bevonden hebbende door de slaghen.
1 Maj.		10 ^u 45'	balans 13'' voor. Een pond gewicht bij gedaen, bij dat van de balans.
2 »		10 ^u 45'	balans 31'' voor. Most 26'' wezen. Ergo noch te veel gecorrigeert.
4 »	m.	12 ⁿ 0'	balans gelijk geset, nae 't verbuijgen der helices.
5 »	m.	9 ^u 45'	balans 7'' achter. Een pond gewicht daar bij gedaen.
7 »	a.	9 ^u 30'	balans 8'' achter. Corrigeert noch wat te veel.
8 »	m.	11 ^u 24'	gelijk geset, naedat de boxhoorns wat met de vijl geholpen had zonder verbuijgen.
9 »	m.	11 ^u 4'	balans 17'' voor, daar een pond bij gehangen.
10 »	m.	12 ⁿ 24'	balans 37'' voor. Soude noch iets te veel corrigeren.
10 »	m.	12 ⁿ 34'	gelijk geset, nae dat het wiggelen van het rechter loodt verbeterd had.

11 Maj.	m.	9 ^u 5'	balans 9'' voor. Het pond gewicht afgehangen. Het wiggelen deed rasser gaan. Daarom enkele draden beter als de lintjes ; en men moet van eersten aan het wiggelen beletten , 't welk door 't trekken aan de lintjes kan geschieden.
12 »	m.	9 ^u 5'	balans 21'' voor
12 »	a.	9 ^u 15'	29½'' balans voor. 3'' te veel. Komt misschien de fout van 't pendulum.
13 »	m.	10 ^u 0'	40'' balans voor. Moet wezen omtrent 35''. Ergo 5'' te veel. De balans afgelicht, en gesien dat eenig blinkende stof van de scherpe as daer se op draght afgeveeght wier. Het had nu 2 daghen vochtigh weer geweest met regen. Den as moet min scherp gemaecttwerden en niet gepolijst, noch oock de circel hollen, opdat rolle en niet en schure. De hollen vlacker. Met het microscopium gesien dat de 2 blinkende plaatsjes in de hollen, daer de messen van den as op rusten, eenighsins rosachtig van couleur waeren, 't welk teijcken is van roest. Daarom de hollen met een weijnigh olie gestreecken.
14 »	m.	1 ^u 8'	0'' gelijk geset.
15 »	m.	1 ^u 30'	8'' balans achter, een weijnigh min 1 pond bij gedaan.
16 »	m.	1 ^u 18'	16'' balans achter. Is wel. Meer olie aan de as van de balans gedaen.
17 »	m.	1 ^u 8'	25'' balans achter.
18 »	m.	2 ^u 5'	32'' » achter.
19 »	m.	12 ^u 0'	40'' » achter. Met van der Cloesen de staele hollen en de messen van den as door 't microscopium besien. Vondt alleen 2 blinkende plaatsjes in de hollen, maar geen slijtingh of swarte vuilicheijdt. De messen en was geen verandering aan te sien.
19 »	m.	12 ^u 17'	0'' gelijk geset.
20 »	m.	12 ^u 10'	7'' balans achter.
21 »	m.	12 ^u 0'	12'' balans achter.

§ XVII.

Ad pag. 182 verba: *que je ne scay* cet. Coll. pag. 318. extr.

In Libro Advers. I. p. 112. de hoc, quod Neutono accidisse ferebant infortunio, Hugenus sequentia annotavit.

» 29 Maj. 1694. Narravit mihi D. Colm ⁽¹⁾ Scotus virum celeberrimum ac summum geometram Js. Neutonum in phrenesin incidisse, abhinc anno et 6 mensibus. An ex nimia studii assiduitate, an dolore infortunii, quod incendio laboratorium chymicum et scripta quaedam amiserat? Cum ad Archiepiscopum Cantabrigiensem venisset, ea locutum, quae alienationem mentis indicarent. Deinde ab amicis curam ejus susceptam, domoque clauso remedia volenti nolenti adhibita, quibus jam sanitatem recuperavit, ut jam rursus librum suum Principiorum Philosophiae Mathematicorum intelligere incipiat. »

Haec Colmi narratio, quam ex his ipsis MSS. Hugenianis petitam, quondam evulgaverat BIOTUS, nuperrime BREWSTERO ansam praebuit inquirendi utrum revera Newtonus mentis morbo correptus fuerit necne. Testimonia, quae attulit Vir Cl., ea esse videntur e quibus probabiliter efficias Newtonum, currente anno 1692, solita mentis corporisque valetudine non fuisse usum, at non ita eum morbo decubuisse ut eo impeditus fuerit quo minus studiis suis vacaret. (Cf. the Life of Sir Isaac Newton by Dav. Brewster, p. 222, sqq.)

(¹) Ita nomen in MS. delinatum est, non *Colin*, ut alii legisse videntur.

§ XVIII.

Ad pag. 234 verba: *les propriétés que j'ay marquées de cette mesme Logarithmique* cet.

Hac paragrapho istarum Logarithmicarum proprietatum demonstrationes exhibebimus, quas sua ipse manu Hugenus in Advers. Libro B, p. 183 sqq., litteris consignavit; eoque 's Gravesandii V. C. errorem corrigemus qui, cum omnia Hugonii opera ederet, has nullibi exstare professus fuerat.

10 Sept. 1661.

In recta AE (fig. 65) sunt partes aequales sumtae AB, BC, CD, etc., et erectae perpendiculares AK, BF, CG, DH, EI, etc., quarum unaquaeque est praecedentis dupla. Transit autem curva KGIL per extrema dictarum perpendicularium, quae eadem per extrema etiam transit perpendicularium LM, NO, etc., quae e punctis bisectionum partium AB, BC, etc. erectae sunt, ac mediae sunt proportionales inter binas utrimque proximas, (crescunt autem et hae secundum duplam proportionem) ac rursus per extrema aliarum perpendicularium, quae bisecant partes ultimo effectas in recta AE, suntque item proximarum suarum mediae proportionales et in dupla proportionem crescunt; atque ita in infinitum; per omnes enim ejusmodi perpendicularium extremitates linea curva versus AE convexa transit. Et patet quotlibet puncta, per quae describenda sit ea linea, facile inveniri. Habet autem proprietates insignes. Primo ad inveniendas quocunque medias proportionales

inter duas datas. Sint ex. gr. PR , QR . Statuantur ad curvam perpendiculares iis aequales ST , VX , et intervallum TX , quo inter se distant, dividatur in partes aequales, unâ plures quam quot medias quaerimus. Velut si duas, oportet dividi in tres partes, ut hic punctis Δ , Z , e quibus eductae ad lineam perpendicularem Δr , ZY , erunt mediae duae quaesitae inter ST , VX , sive LR , QR . Quod facile demonstratur, quia inter XV , TS cadit series infinita proportionalium ex natura lineae, earumque totidem inter XV , ZY , quot inter ZY , Δr ac inter Δr , TS ; totidem, inquam, quia partes XZ , $Z\Delta$, ΔT sunt aequales, innumeraeque illae proportionales aequalibus intervallis a se mutuo distant.

TA , XA , considerandae sunt ut Logarithmi linearum TS , XV , et intervallum TX ut differentia logarithmorum. Ubicumque binae perpendiculares intervallo eodem dissitae erunt, habebunt eandem inter se rationem. Sic sicubi duae distiterint intervallo aequali AB , earum major minoris dupla erit, quia nempe BF est dupla AK .

Recta RA est curvae Asymptotos.

Spatia duo quaevis a binis perpendicularibus intercepta, quae aequalibus intervallis distant, ut sunt spatia $TSr\Delta$, $YZXV$, eam inter se rationem habent, quam major unius perpendicularis ad majorem perpendicularem alterius, vel quam minor ad minorem. Facillime demonstratur.

Spatium quodvis a binis perpendicularibus interceptum est ad spatium deinceps decrescens in infinitum, ut differentia perpendicularium ad perpendicularem minorem. Sic spatium $ST\Delta r$ est ad spatium infinitum $rHK\Omega\Delta$ ut $S\Theta$ ad $r\Delta$. Si enim aequalibus intervallis ipsi $r\Delta$ constituentur perpendiculares YZ , VX , IE , etc. in infinitum; quia spatium $ST\Delta r$ ad spatium rZ ut ST ad $r\Delta$, per praeced., hoc est ut $S\Theta$ ad $r\Delta$, quia tres ST , $r\Delta$, YZ sunt proportionales; et rursus, spatium rZ ad YX sicut $r\Delta$ ad $Y\Pi$, ideoque spatium $S\Delta$

ad YX , sicut $S\Theta$ ad $Y\Pi$; atque ita porro. Erit proinde spatium $S\Delta$ ad omnia spatia rZ , YX , etc., in infinitum, ut $S\Theta$ ad omnes $r\Delta$, $Y\Pi$, etc. quae simul efficiunt ipsam $r\Delta$. Ergo etc.

Spatia quaevis duo a duabus perpendicularibus intercepta, ut CE , GN , (fig. 66) sunt inter se sicut perpendicularium differentiae, hoc est hic ut CH ad GL . Ducatur enim et GK parall. AB .

Quia ergo, per praeced., spatium CE est ad spatium infinitum DEA , ut CH ad HB , spatiumque similiter DF ad spatium infinitum GFA ut DK ad KE , et invertendo et componendo spatium infinitum GFA una cum spatio DF , hoc est spatium infinitum DEA ad spatium DF ut DE sive HB ad DK , erit ex aequo spatium CE ad spatium DF ut CH ad DK . Eodem modo autem ostenditur spatium DC ad spatium GN ut DK ad GL . Ergo ex aequo erit spatium CE ad spatium GN ut CH ad GL . Quod erat ost.

Si curvam linea recta contingat et a puncto contactus in asymptoton perpendicularis ducatur, erit pars asymptoti inter perpendicularem et tangentem intercepta, eidem semper lineae rectae aequalis.

Sint hic tangentes (fig. 67) AE , BF et a punctis A , B , perpendiculares in asymptoton AC , BD . Dico partes CE , DF esse aequales. Vel potius sic; sit AE tangens, sitque ipsi CE aequalis DF ; dico et FB tangentem esse in B .

Sumatur enim in recta BF quodlibet punctum praeter B , ut O , per quod ducatur perpendicularis POQ , et sumta ipsi DQ aequali CS in eandem partem, erigatur perpendicularis SHG , secans tangentem AE in H , curvam vero in G . Erit itaque GS major quam HS . Est autem ut AC ad HS , hoc est ut CE ad SE , sive ut DF ad QF , ita BD ad OQ . Et invertendo, ut HS ad AC , ita OQ ad BD . Sed ut AC ad GS ita est BD ad PQ , propter intervalla

aequalia CS, DQ. Ergo ex aequo erit ut HS ad GS, ita OQ ad PQ. Erat autem GS major quam HS, ergo et PQ major quam OQ. Unde apparet punctum C esse a parte convexa curvae AB. Eodem modo autem et punctum N, sumtum ab altera parte puncti B, ostenditur cadere ad partem convexam curvae AB. Ergo tangit eam recta NBOF in puncto B. Quod erat dem.

Longitudo lineae CE vel DF, cujus ope tangens in quovis puncto duci potest, non potest ratione ulla geometrica, ut puto, inveniri, sed ex logarithmis quamlibet proxime. Nam si consideremus triangulum minimum AVX, cujus latus AX tam curvae AB quam tangentis AE portio censendum est, et perpendiculares AC, XY, duos numeros esse putemus, minimo quodam excessu sese superantes, ut 100000 et 99999, erit VX vel CY logarithmorum ipsorum differentia, quae inter istos est 43430, ut patet ex tabulis. Jam si igitur fiat ut AV, quae est 1, ad VX, 43430, ita AC, 100000 ad CE, fiet haec 4343000000, qualium nempe differentia inter logarithmos numerorum 100000 et 99999 est 43430, qualiumque logarithmus binarii est 3010299957. Linea autem, quae referat logarithmum binarii facile invenitur, applicando tantum duas perpendiculares inter curvam et asymptoton, quarum altera sit alterius dupla, velut GS, MR; nam SR intervallum referet logarithmum binarii. Ergo si fiat ut 30102 ad 43430, hoc est proxime ut 3 ad $4\frac{1}{2}$, ita SR ad aliam; ea erit linea CE vel DF, quam *latus rectum curvae hujus* appellabimus. Invenitur autem adhuc accuratius, si loco numerorum 100000 et 99999, quaeratur per numeros 1 et $1\frac{1}{100000000000000000000}$; fit enim CE 434294481903251804, qualium logarithmus binarii est 301029995663981195. Patebit autem usus hujus lateris recti in sequentibus.

Si a puncto quolibet in curva sumto, ut A (fig. 68), dimittatur in asymptoton perpendicularis AB, dico rectangulum ab AB et latere

recto BF comprehensum, nempe $ABFE$, aequari spatio infinito inter curvam, perpendicularem AB et asymptoton BZ interjecto.

Fiat enim primo in eodem latere AB rectangulum quoddam AH , quod majus sit rectangulo AF . Dico illud majus quoque esse dicto spatio infinito. Ductis enim diagoniis AF , AH , rectangulorum utrorumque, constat quidem AF tangere curvam in A , quia BF ponitur esse latus rectum, unde pars quaedam lineae AH cadet intra curvae cavam partem, puta AK . Dividatur AH in partes tot aequales, punctis L, M, N , ut earum quaelibet sit minor quam AK . Et ductis per ea puncta rectis parallelis AB , dividant ea rectangulum AH in rectangula aequalia, ut sunt, AR , QT , etc. Ab iisdem vero punctis si ducantur parallelae asymptoti lineae LO , MA , NC , et a punctis, ubi hae occurrunt curvae AC , dimittantur perpendiculares in asymptoton; velut OY , $\Delta\Pi$, CZ , fient etiam spatia inter binas quasque earum interjecta inter se aequalia, ut sunt $AOYB$, $O\Delta\Pi Y$, $\Delta CZ\Pi$, ac denique etiam infimum spatium infinitum CZD , ut constat ex praecedentibus, quia nempe differentiae duarum perpendicularium, dicta spatia comprehendentium, sunt ex constructione aequales. Jam vero rectangulum AR majus esse liquet spatio $AOYB$, cum hoc illius pars sit; nam OY necessario cadit inter AB et LR . Ergo et rectangulum SR majus erit spatio $OY\Pi\Delta$, quippe quod aequale est spatio $AOYB$. Item rectangulum VT majus erit spatio $\Delta\Pi ZC$, atque ita singula rectangula, si plura forent, singulis sequentibus spatiis, quum par utrorumque sit numerus. Denique ultimum rectangulum VH majus quoque spatio infimo ac infinito CZD . Itaque omnia rectangula omnibus simul spatiis; hoc est rectangulum $ABHG$ spatio infinito $ABDC$ majus erit.

Esto rursus rectangulum quoddam $ABHG$, (fig. 69) quod sit minus rectangulo $ABFE$; dico illud minus quoque esse spatio infinito

nitq

nito $A D B$. Ductis enim, ut ante, diagoniis $A F$, $A H$, cum $A F$ tangat curvam in A , secabit eam recta $H A$ versus A producta, productaeque pars cadet intra cavitatem curvae ut $A K$. Dividatur $A H$ in tot partes aequales, ut earum una apposita in producta $H A$, velut $A L$, non pertingat ad K . Constructis porro reliquis ut prius, patet rectangulum $A B$ minus nunc esse spatio $A O Y B$, cujus nempe pars est, nam $L R$ manifesto nunc cadit inter $O Y$ et $A B$. Hinc ergo et rectangulum $A T$ minus erit spatio $A \Delta \Pi B$, cum et rectangulum rectangulo et spatium spatio priori sit aequale. Eadem ratione rectangulum $Q T$ minus erit spatio $\Delta \Omega \Theta \Pi$, et rectangulum $Q X$ spatio $\Delta C Z \Theta$ et rectangulum $G X$ spatio $C D Z$ infinito, quod nempe et ipsum reliquis spatiis aequale est. Itaque totum rectangulum $A B H G$ minus esse patet spatio omni $A \Omega C D B A$ infinito.

Cum igitur ostensum sit, rectangulum quodlibet, quod majus est rectangulo $A B F E$, majus quoque esse spatio $A C D B$ infinito; itemque rectangulum quodvis, quod minus est rectangulo $A B F E$, minus quoque esse praedicto spatio: necesse est rectangulum ipsum $A B F E$ eidem spatio infinito aequale esse. Quod erat dem.

Nota vero hunc modum demonstrandi sine deductione ad absurdum, quae videtur hoc pacto alibi quoque devitari posse.

Si ergo ab eodem puncto curvae perpendicularis in asymptoton et tangens ducatur, ut sunt hic (fig. 70) $A B$, $A F$: erit semper triangulum $A B F$ dimidium spatii totius infiniti $A B D$.

Spatium quodvis inter duas perpendiculares interceptum, ut $A B L H$, (fig. 71) aequale erit rectangulo sub latere recto et differentia dictarum perpendicularium, ut hic rectangulum $A K$. Nam cum spatium infinitum $A B D$ sit aequale rectangulo $A F$; spatium vero infinitum $H L D$ aequale rectangulo $C F$, erit reliquum spatium $A B L H$ aequale rectangulo reliquo $A K$:

Alia praecedentis demonstratio datur ostendendo spatium $A B D C$

(fig. 72) terminatum duabus perpendicularibus AB , CD duplum semper esse spatii inter duas tangentes AF , CE , ab iisdem punctis eductas, intercepti.

Basis BD in partes aequales dividatur BH , HN , etc., unde perpendiculares ad curvam erigantur HK , NP , etc. et a punctis A , K , P , etc., tangentes ducantur AF , KM , etc. et compleantur rectangula BG , BK , KN , PH , etc. et tangentes binae quaeque proxime sibi occurrant in punctis L , Q , etc. Jam quia BF , HM , NR , etc., sunt aequales, fient et FM , MR , etc. aequales, et singulae singulis BH , HN , NO , etc. Itaque triangulum FLM minus erit $\frac{1}{2}$ rectangulo AH , majus vero $\frac{1}{2}$ rectangulo KB . Itidem triangulum MQR minus erit $\frac{1}{2}$ rectangulo KN , majus vero $\frac{1}{2}$ rectangulo PH . Atque ita composita figura ex omnibus triangulis minor erit $\frac{1}{2}$ figura ex circumscriptis rectangulis, major vero $\frac{1}{2}$ figura ex rectangulis inscriptis. Unde facile ostendetur spatium $ACEF$ dimidium esse spatii $ACDB$. Quod cum ubique contingat, ubicunque perpendicularis CD statuatur, patet, cum CD infinite parva erit, spatium $ACEF$ fore infinitum inter curvam et asymptoton interjacens, rectaque AF terminatum; spatium vero $ACDB$ fore infinitum inter curvam et asymptoton atque linea AB terminatum. Itaque illud spatium infinitum hujus infiniti spatii dimidium erit, ac proinde et triangulum reliquum AFB ejusdem spatii infiniti $ACXE$ dimidium esse constabit.

Hinc et de solido spatii infiniti circa axim BE demonstrabitur, esse sesquialterum coni ex conversione trianguli AFB circa BF .

Nempe cum solidum a triangulo FLM sit minus quam $\frac{1}{2}$ cylindri a rectangulo AH , majus vero quam $\frac{1}{2}$ cylindri a rectangulo KB , atque ita de ceteris; facile ostendetur solidum a spatio $ACEF$ esse $\frac{1}{2}$ solidi a spatio $ACDB$, idque ubicunque terminus CD statuatur; unde solidum ab infinito spatio $ACXEFA$ erit $\frac{1}{2}$ solidi

ab infinito spatio $ACXEBA$; ac proinde conus a reliquo triangulo AFB aequabitur $\frac{2}{3}$ solidi ab eodem spatio $ACXEBA$.

Hinc porro et distantia centri grav. spatii infiniti $ABEXA$, (fig. 73) ab asymptoto BE ostenditur esse quarta pars perpendicularis AB .

Sumta enim $BD = \text{duplae } BF$ et $BO = \frac{1}{2} AB$, et completo rectangulo $BOCD$, erit hoc duplum trianguli ABF , ac proinde aequale spatio infinito $ABEXA$. Sed et cylindrus a rectangulo $BOCD$ circa BD aequabitur solido ex conversione spatii dicti infiniti circa BE . Est enim cylindrus e conversione rectanguli $BOCD$ sexcuplus conici a conversione trianguli OFB circa BF , ideoque sesquialter conici a triangulo AFB circa eandem BF , cujus conici et solidum a spatio infinito $ABEX$ sesquialterum ostendimus. Itaque centrum gravitatis solidi infiniti et rectanguli $BOCD$ aequaliter distare necesse est a linea BE ; utraque igitur distant dimidiâ BO , hoc est quartâ parte AB . Q. E. D.

Potest idem hoc de centro gravitatis aliter quoque ostendi, descriptis intra spatium infinitum $ABEX$ (fig. 74) rectangulis, quorum unumquodque aequali altitudinis excessu sibi proximum superat. Haec enim si multitudine infinita imaginemur, poterunt haberi pro aequalibus inter se. Altissimi autem centrum gravitatis distabit ab asymptoto BE per dimidiam AB , et sequentium deinceps centra gr. aequalibus semper intervallis propiora fient ipsi BE ; quae scilicet intervalla erunt dimidia excessus altitudinum proximorum rectangulorum. Cum igitur aequalium magnitudinum centra gravitatis in aequalia intervalla dividant lineam BT , dimidiam ipsius AB , erit commune omnium gravitatum centrum in medio ipsius BT , hoc est, distabit per $\frac{1}{2} AB$ ab asymptoto BE .

Nullius spatii a curva et asymptoto et duabus perpendicularibus comprehensi centrum gr. ulterius distat a majori earum perpendicularium quam est longitudo lateris recti.

Sit ejusmodi spatium $ABCD$, (fig. 75) dico ejus centrum gr. non

ulterius distare ab AB quam est longitudo lateris recti. Si enim fieri potest, sit ejus centrum gr. in G , ita ut GM major sit latere recto. Possum ergo ab ea abscindere particulam, ut MR , ut residua RG adhuc major sit latere recto. Ducatur NRO parall. BA , et per O , ubi occurrit curvae, agatur OM recta; fietque necessario NM minor latere recto, quia OM non tangit sed secat curvam in O . Sit OP parall. BC ; et ipsi OP vel BN sumatur aequalis CF , versus partem acutam spatii infiniti et ducatur FE parall. BA . Quia igitur portionis $OEFN$ basis FN aequalis est basi CB portionis $ADCB$, erit quoque ON ad EF ut AB ad DC ; unde, quum portio utraque constare concipi possit ex innumeris rectangulis, aequales bases habentibus atque eadem proportionem decrescentibus, manifestum est (sed et accurate ostendi posset) utriusque centra gr. similiter dividere distantiam utriusque extremarum perpendicularium; quae distantia cum sit utrobique aequalis, aequaliter ergo utriusque centra gr. aberunt a perpendicularibus majoribus AB , ON . Ergo, cum centrum gr. spatii $ADCB$ ponatur G , erit (sumta $RH = MG$) punctum H centrum gr. spatii $ONFE$. A quo si auferatur spatium $DEFC$, cujus intra se ipsum est centrum gr.; apparet spatii reliqui $ODCN$ centrum gr. inter H et G cadere; puta in K . Jam vero quia spatium $AONB$ est ad spatium $ODCN$ ut AP ad OQ (ex praecedentibus) hoc est ut OP ad XQ ; si fiat ut OP ad XQ ita KG ad GL , erit L centrum gr. spatii $AONB$, quia nempe G ponitur centr. gr. spatii totius $ABCD$, et K centrum gr. spatii $ONCD$. Erit autem GL minor quam XQ , cum et KG sit minor quam OP ; nam tota HG ipsi OP aequalis erat. Atqui XQ minor est quam MN , et haec minor latere recto, ut supra dictum fuit. Ergo GL omnino minor erit latere recto. Sed GR ipso major erat; ergo GL minor quam GR . Itaque L centrum gr. spatii $AONB$ caderet extra spatium ipsum, atque ita ut, ducta per L linea recta, totum caderet ad partem unam; quod esse non potest.

Hinc itaque patet, ubicunque CD perpendicularis statuatur, etsi in infinitum distans ab AB , semper spatii ab utraque terminati centrum gr. non ulterius ab AB remotum fore, quam longitudine lateris recti. Atque adeo recte de spatio infinito concluditur, esse ei centrum aliquod gr., idque non ulterius, quam dictum est, distare ab AB .

Ostendam autem neque minus distare ab AB , dicta longitudine lateris recti, ac proinde ipsa hac longitudine inde abesse.

Sit enim (fig. 76) spatii infiniti $AECB$ centr. gr. G ; sitque, si potest, GM minor latere recto. Abscindam igitur ab ea partem MR , ita ut GM una cum MR minor adhuc sit latere recto: constat enim fieri posse. Ducatur NRO ut supra, itemque recta AOM et OP , et sumatur RK aequalis MG , unde et GK aequalis fiet MR . Cum igitur duas portiones quaslibet, quarum bases aequales, centra gr. suae ita dividant, ut aequaliter distent a perpendiculari majori, sicut modo de portionibus $ABCD$, $ONFE$, ostendimus, sequitur et de infinitis portionibus, quales sunt hic $ABCE$, $ONCE$, idem verum esse. Cum ergo G ponatur centrum gr. spatii infiniti $ABCE$, sitque MG aequalis RK , erit K centrum gr. spatii infiniti $ONCE$. Si jam ergo fiat, sicut portio $AONB$ ad dictum spatium infinitum $ONCE$, hoc est, ut AP ad ON , hoc est, ut PO sive BN ad NM , ita KG ad GL , erit in L centrum gr. portionis $AONB$; eritque GL aequalis NM , quum KG sit aequalis BN . Est autem BM major latere recto (aequalis enim huic esset, si AM tangeret curvam in A , cujus pars AO nunc arcum curvae subtendit, ideoque angulus PAO fit major, quam si AO in A tangens esset). Sed GM una cum MR minor est latere recto; ex constr. Ergo ablatis utrimque aequalibus, hinc MR , inde BN , relinquitur NM major quam GM . Sed ipsi NM aequalis ostensa est GL . Ergo et GL major quam GM . Itaque L centrum gr. portionis $ABNO$ cadit extra portionem ipsam, ita ut recta per illud

duci possit, cui tota portio jaceat ad partem eandem; quod est absurdum.

Itaque in spatio infinito $ABCE$ centrum gr. nec magis nec etiam minus distat ab AB quam longitudine lateris recti; ergo hac ipsa longitudine ab ea remotum est. Q. E. D.

Hinc et de solido spatii infiniti ex conversione ejus circa perpendicularem pronuntiare poterimus. Etenim si (fig. 77) intra angulum perpendicularis cum asymptoto rectangulum applicetur, ut $OBDC$, cujus altitudo OB dimidia sit AB , basis vero BD dupla lateris recti, manifestum est ejus rectanguli centrum gr. P incidere in centrum gr. spatii infiniti $ABEX$; cui spatio quoque dictum rectangulum aequale est. Unde constat conversione ejus circa OB cylindrum gigni aequale solido infinito ex conversione spatii infiniti circa eandem axin AB . Sicut de cylindro, qui fit ejusdem rectanguli conversione circa BD , ostensum antea est, esse eum aequalem solido alteri infinito ex circumvolutione spatii $ABEX$ circa asymptoton BE .

Est ergo solidum ex spatio infinito $ABEX$ circa asymptoton BE ad solidum infinitum ex eodem spatio circa AB perpendicularem, sicut PF ad PG , hoc est, sicut $\frac{1}{2}$ perpendicularis AB ad latus rectum lineae AX . Ad solidum vero circa rectam AZ asymptoto parallelam ut 1 ad 3. Quod postremum solidum calicem refert infinitae capacitatis, licet exigui ponderis; quod et in Cissoide contingit.

Portionis a binis perpendicularibus terminatae centrum gr. distat a perpendiculari majori, longitudine lateris recti, demta linea, quae se habeat ad basin portionis sicut minor perpendicularis ad excessum, quo ipsa a majori superatur.

Si igitur detur portionis cujusvis terminatae centrum gr., inveniri poterit latus rectum.

Centrum gr. solidi infiniti circa asymptoton distat a perpendiculari sive a basi ipsius solidi per dimidium lateris recti. ⁽¹⁾

AB (fig. 78) latus rectum. Conus a triangulo CAB circa AB est $\frac{2}{3}$ solidi illius infiniti.

Si solidi a CAFE centrum gr. D, et solidi a GKFE centrum gr. N, erunt aequales AD, KN. Quod facile ostenditur ex sectione in orbes proportionales, quorum omnium eadem altitudo in recta AF.

Lat. rectum AB = a, AC = b, AK = c, AD = x, CM = d = $\frac{cb}{a}$,

solidum a CAFE = $\frac{2}{3} b b$; solidum a GKFE = $\frac{2}{3} b b - 3 b d + \frac{2}{3} d d$;
solidum a CGKA = $3 b d - \frac{2}{3} d d$.

solid. a GKFE solid. a CGKA. DQ DN.

$$\frac{2}{3} b b - 3 b d + \frac{2}{3} d d : 3 b d - \frac{2}{3} d d = x - \frac{1}{2} c : c$$

$$\text{sive } \frac{2}{3} b b - 3 b d : 3 b d = x - \frac{1}{2} c : c$$

$$\frac{2}{3} b - 3 d : 3 d = x - \frac{1}{2} c : c$$

$$\frac{2}{3} b - 3 \cdot \frac{bc}{a} : 3 \frac{bc}{a} = x - \frac{1}{2} c : c$$

$$\frac{2}{3} a - 3 c : 3 c = x - \frac{1}{2} c : c$$

$$\frac{2}{3} a - 3 c = 3 x - \frac{3}{2} c$$

$$3 a - 6 c = 6 x - 3 c$$

$$a - 2 c = 2 x - c$$

$$a - 3 c = 2 x.$$

$$c \text{ minimum} = 0$$

$$a = 2 x$$

$$\frac{2}{3} a = x.$$

Ergo et centrum gravitatis solidi infiniti circa perpendicularem distabit per $\frac{2}{3}$ ipsius perpendicularis, quae est axis solidi.

(¹) Sequens hujus propositionis demonstratio non exstat in Libro B. Sed a nobis reperta est in Libro G. Ex ea apparet in fig. 78 ordinatas CA et GK ab invicem perparum distare, quo fit ut MG et MC tamquam incrementa abscissae et ordinatae habenda sint.

§ XIX.

Ad pag. 316 verba: *l'on m'a donné une solution du problème de la quadrature de la feuille de Descartes.*

Quadratura celebratissimae curvae, quae Cartesii Folium vocatur, a Voldero. V. cl. profecta, et in Hugonii Libro Advers. I. asservata, eo lubentius hoc loco inseritur, cum haud alia, quantum scio, supersint doctrinae Volderi specimina, quam quae edendis Hugonii operibus posthumis exhibuit. In hac quadratura definienda usus est Volderus theoremate Barrovii supra (p. 137) citato; ipsam vero demonstrationem his verbis descripsit: (fig. 79)

$$AD=x \quad DB \text{ sive } DH=y \quad x^3+y^3=nxy$$

$$AN=z, \frac{z-t}{\sqrt{2}}=x, t^2=x^2. \frac{-2z+n\sqrt{2}}{6z+n\sqrt{2}}, t=\pm z\sqrt{\frac{-2z+n\sqrt{2}}{6z+n\sqrt{2}}}$$

$$NH=t, \frac{z+t}{\sqrt{2}}=y, \frac{2z}{\sqrt{2}}=x+y, \frac{2t}{\sqrt{2}}=y-x.$$

$$AQ=z, \frac{z+t}{\sqrt{2}}=x, \frac{2z}{\sqrt{2}}=x+y, \frac{2t}{\sqrt{2}}=x-y.$$

$$BQ=t, \frac{z-t}{\sqrt{2}}=y, t^2=x^2. \frac{-2z+n\sqrt{2}}{6z+n\sqrt{2}}, t=\pm z\sqrt{\frac{-2z+n\sqrt{2}}{6z+n\sqrt{2}}}$$

Laet beschreven worden de kromme CORF, wiens diameter is CF, ende de ordinatim applicata NO; de natuure van deze kromme is soodanigh dat de intercepta tusschen de ordinatim applicata NO en de perpendicularaer op de kromme OG, naementlijck NG, zoo groot is als de ordinatim applicata van de kromme CHA te weten NH. Quae de aequatie, die de natuur van de kromme CORF denoteert, te vinden.

NG is dan volgens het gesupponeerde $=z\sqrt{\frac{-2z+n\sqrt{2}}{6z+n\sqrt{2}}}$. De
regel

regel van Slasius leert nu dat om van deze kromme te zoeken de linie NP ofte 't welk het selfde is de linie NG (OP zijnde gestelt te wezen de raeklijn) men in dessels aequatie de quantiteijten waar in z gevonden worden, een dimensie moet verminderen; zal diensvolgens dan de quantiteijt $z \sqrt{\frac{-2z+n\sqrt{2}}{6z+n\sqrt{2}}}$ met z wederom

moeten werden gemultipliceert, om z te brengen tot dezelfde dimensien, die in de aequatie van de kromme gevonden worden;

komt $zx \sqrt{\frac{-2z+n\sqrt{2}}{6z+n\sqrt{2}}}$. Maer om deze quantiteijt te brengen tot een andere, waarin geen termen ten respecte van z zullen ontbreecken, zoo laet in plaets van zx gestelt worden $axz + bz + c$ (a , b en c zijn quantiteijten, waermede ider term zal geafficieerd moeten worden). $(axz + bz + c) \times \sqrt{\frac{-2z+n\sqrt{2}}{6z+n\sqrt{2}}}$ kan nu gelijk gesupponeert worden aen uu ; NO gestelt zijnde $=u$, want $(axz + bz + c) \sqrt{\frac{-2z+n\sqrt{2}}{6z+n\sqrt{2}}}$ moet geconsidereerd worden als te zijn maer van 2 dimensien, en CF is gesteld geweest te zijn de diameter van de kromme CORF; zoo is dan

$(axz + bz + c) \sqrt{\frac{2z+n\sqrt{2}}{6z+n\sqrt{2}}} = uu$. En van het surdise getal gelibereert, en de termen aan eene zijde gebraght zijnde:

$$\left. \begin{array}{l} -2a^2x^5 - 4abx^4 - 4a^2x \\ + a^2n\sqrt{2} \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} x^3 - 4bc \\ - 2bb \\ + 2abn\sqrt{2} \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} x^2 - 2c^2 \\ + 2acn\sqrt{2} \\ + 2bcn\sqrt{2} \end{array} \right\} x + c^2n\sqrt{2} = 0.$$

hieruijt wort door den regel van Slusius gevonden

$$NP = \frac{24a^2x + 4a^2n\sqrt{2}}{-10a^2x^4 - 16abx^3 - 12a^2x^2 - 12acx - 8bcx^2 - 4acn\sqrt{2} - 6b^2x - 2b^2n\sqrt{2} - 6u^2} \left. \begin{array}{l} x^3 - 12ac \\ + 6abn\sqrt{2} \\ - 6b^2 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} x^2 - 8bc \\ + 4acn\sqrt{2} \\ + 2b^2n\sqrt{2} \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} x - 2c^2 \\ + 2bcn\sqrt{2} \\ - 6u^2 \end{array} \right\}$$

A a

NP is mede $= \frac{n^2}{-z \sqrt{\frac{-2z+n\sqrt{2}}{6z+n\sqrt{2}}}}$; want gelijk GN tot NO, also NO

tot NP; en dienvolgens (*) $2u^2 M \sqrt{6z+n\sqrt{2}} \cdot M - z \sqrt{(-2z+n\sqrt{2})}$

$$= \begin{matrix} -5a^2z^4 - 8ab \\ + 2a^2n\sqrt{2} \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} z^3 - 6ac \\ - 3b^2 \\ + 3abn\sqrt{2} \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} z^2 - 4bc \\ + 2acn\sqrt{2} \\ + b^2n\sqrt{2} \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} z - c^2 \\ + bcn\sqrt{2} \\ - 3u^4 \end{matrix} \right.$$

en in plaats van u^2 en u^4 haere valeuren gestelt:

$$\frac{2ax^2 + 2bx + 2cM \cdot 2x^2 - zn\sqrt{2}}{= -5a^2z^4 - 8ab \left\{ \begin{matrix} z^3 - 6ac \\ - 3b^2 \\ + 3abn\sqrt{2} \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} z^2 - 4bc \\ + 2acn\sqrt{2} \\ + b^2n\sqrt{2} \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} z - c^2 \\ + bcn\sqrt{2} \end{matrix} \right.}$$

$$\div \frac{3 \square (ax^2 + bx + c) M \cdot \sqrt{-2z + n\sqrt{2}}}{6z + n\sqrt{2}}$$

ende door de multiplicatie komt:

$$\begin{matrix} 24ax^5 \\ + (24b - 8an\sqrt{2})x^4 \\ + (24c - 8bn\sqrt{2} - 4a^2n^2)x^3 \\ - (4b^2n^2 + 8cn\sqrt{2})x^2 \\ - 4c^2n^2x \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} - 24a^2x^5 \\ - (36ab - 4a^2n\sqrt{2})x^4 \\ - (24ac + 12b^2 - 4abn\sqrt{2} - 4a^2n^2)x^3 \\ - (12bc - 6abn^2)x^2 \\ + (4bcn\sqrt{2} - 4acn^2 - 2b^2n^2)x \\ - 4c^2n\sqrt{2} + 2b^2cn^2 \end{matrix} \right.$$

de termen van de aequatie met malkanderen vergelijkende, is

$$24ax^5 = -24a^2x^5, \text{ en } a = -1;$$

$$\text{verders is: } (24b - 8an\sqrt{2})x^4 = (-36ab + 4a^2n\sqrt{2})x^4,$$

en in plaats van a gestelt -1 komt $b = +\frac{1}{3}n\sqrt{2}$, en $+4c^2n\sqrt{2} = +2b^2cn^2$,

en in plaats van b gestelt $\frac{1}{3}n\sqrt{2}$ komt $c = \frac{1}{3}n^2$; deze valeuren van

$$a, b, c \text{ dan gestelt in d'aequatie } \frac{ax^2 + bx + c}{\sqrt{\frac{-2z+n\sqrt{2}}{6z+n\sqrt{2}}}} = n^2,$$

(*) M-hoc loco est signum multiplicationis, et max $\square$ pro exponente 2 scribitur.

komt
$$-z^2 + \frac{1}{2}nz\sqrt{2} + \frac{1}{12}n^2 \sqrt{\frac{-2z+n\sqrt{2}}{6z+n\sqrt{2}}} = u^2$$
 voor de aequatie

van de kromme CORF, z zijnde $= AN$ en $NO = u$, uit welke aequatie de natuur van deze kromme openbaer genoeg is, want de ordinatim applicata NO ofte u wordende $= 0$, komt $z = \frac{1}{2}n\sqrt{2}$ en $z = -\frac{1}{2}n\sqrt{2}$, tot een teecken dat de kromme de linie CF zal snijden in C en F, want AC is $= \frac{1}{2}n\sqrt{2}$ en AF $= -\frac{1}{2}n\sqrt{2}$ met het signum —, om dat F aen d'andre zijde contrary als C wort genomen, zoodat AF dan $\frac{1}{2}$ is van AC, door welk punt F oock loopt d'asymptotos van het blatie AHCBAL. Dewijle nu de linie NG = NH is, zoo zal, volgens het theorema Barrovii, de area die begrepen is tusschen de lijnen CN, NH, en de kromme CH zoo groot zijn als een $\frac{1}{2}$ quadraat NO; om nu te vinden de groote van het geheele blaetie, behoeve z maer te stellen $= 0$, en is $u^2 = \frac{1}{12}n^2$, hier van de helft komt $\frac{1}{12}n^2 =$ de area tusschen CA en de kromme CHA begrepen; voor het geheele blaetie dan $\frac{1}{6}n^2$. CHNC is

$$= -\frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{2}nz\sqrt{2} + \frac{1}{12}n^2 M. \sqrt{\frac{-2z+n\sqrt{2}}{6z+n\sqrt{2}}}. \text{ Dit getrocken van } \frac{1}{12}n^2$$

$$\text{komt voor ANHYA } \frac{1}{12}n^2 + \frac{1}{2}z^2 - \frac{1}{2}nz\sqrt{2} - \frac{1}{12}n^2 \sqrt{\frac{-2z+n\sqrt{2}}{6z+n\sqrt{2}}};$$

en het triangul ANH $= \frac{1}{2}z^2 \sqrt{\frac{-2z+n\sqrt{2}}{6z+n\sqrt{2}}}$ hier van getrocken, voor het spatium AHYA

$$\frac{1}{12}n^2 - \frac{1}{2}nz\sqrt{2} + \frac{1}{12}n^2 \sqrt{\frac{-2z+n\sqrt{2}}{6z+n\sqrt{2}}} = \frac{1}{12}n^2 - \frac{1}{2}nz\sqrt{2} - \frac{1}{12}n^2 \sqrt{\frac{-2z+n\sqrt{2}}{6z+n\sqrt{2}}}.$$

In de plaets van z nu gestelt zijnde $\frac{1}{2}x\sqrt{2} + \frac{1}{2}y\sqrt{2}$ (gelijck z gevonden is) komt

$$\frac{1}{12}nn - \frac{1}{2}nt\sqrt{2} - \frac{1}{12}n^2 \sqrt{\frac{-x-y+n}{3x+3y+n}},$$

en voor n genomen $\frac{x^2+y^2}{xy}$;

$$\frac{1}{12}n^2 - \frac{1}{6}nt\sqrt{2} - \frac{1}{12}n^2 \sqrt{\frac{-x^2y - xy^2 + x^3 + y^3}{3x^2y + 3xy^2 + x^3 + y^3}} = \frac{1}{12}n^2 - \frac{1}{6}nt\sqrt{2} - \frac{1}{12}n^2 M \frac{\pm x \pm y}{x+y}$$

y genomen zijnde grooter als x , 't welk geschiet wanneer wij $\Delta N = z$ stellen, komt voor het spatium $AHYA$

$$\frac{1}{12}n^2 - \frac{1}{6}nt\sqrt{2} + \frac{\frac{1}{12}n^2x - \frac{1}{12}n^2y}{x+y} = \frac{\frac{1}{6}n^2x}{x+y} - \frac{1}{6}nt\sqrt{2},$$

en in plaats van t gestelt zijne waarde $\frac{1}{2}y\sqrt{2} - \frac{1}{2}x\sqrt{2}$,

$$AHYA = \frac{\frac{1}{6}n^2x}{x+y} - \frac{1}{6}ny + \frac{1}{6}nx = \frac{\frac{1}{6}n^2x - \frac{1}{6}ny^2 + \frac{1}{6}nx^2}{x+y}$$

en n zijnde $\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x}$,

$$AHYA = \frac{\frac{1}{6}n \cdot \frac{x^3}{y} + \frac{1}{6}ny^2 - \frac{1}{6}ny^2 + \frac{1}{6}nx^2}{x+y} = \frac{1}{6} \cdot \frac{nx^2}{y}.$$

Maar x grooter zijnde als y , naementlijk wanneer $\Delta Q = z$ gestelt is, zoo zal het spatium

$$ABZA = \frac{1}{12}n^2 - \frac{1}{6}nt\sqrt{2} - \frac{\frac{1}{12}n^2x + \frac{1}{12}n^2y}{x+y} = \frac{\frac{1}{6}n^2y}{x+y} - \frac{1}{6}nt\sqrt{2}$$

zijn, en in plaats van t gestelt zijne waarde $\frac{1}{2}x\sqrt{2} - \frac{1}{2}y\sqrt{2}$,

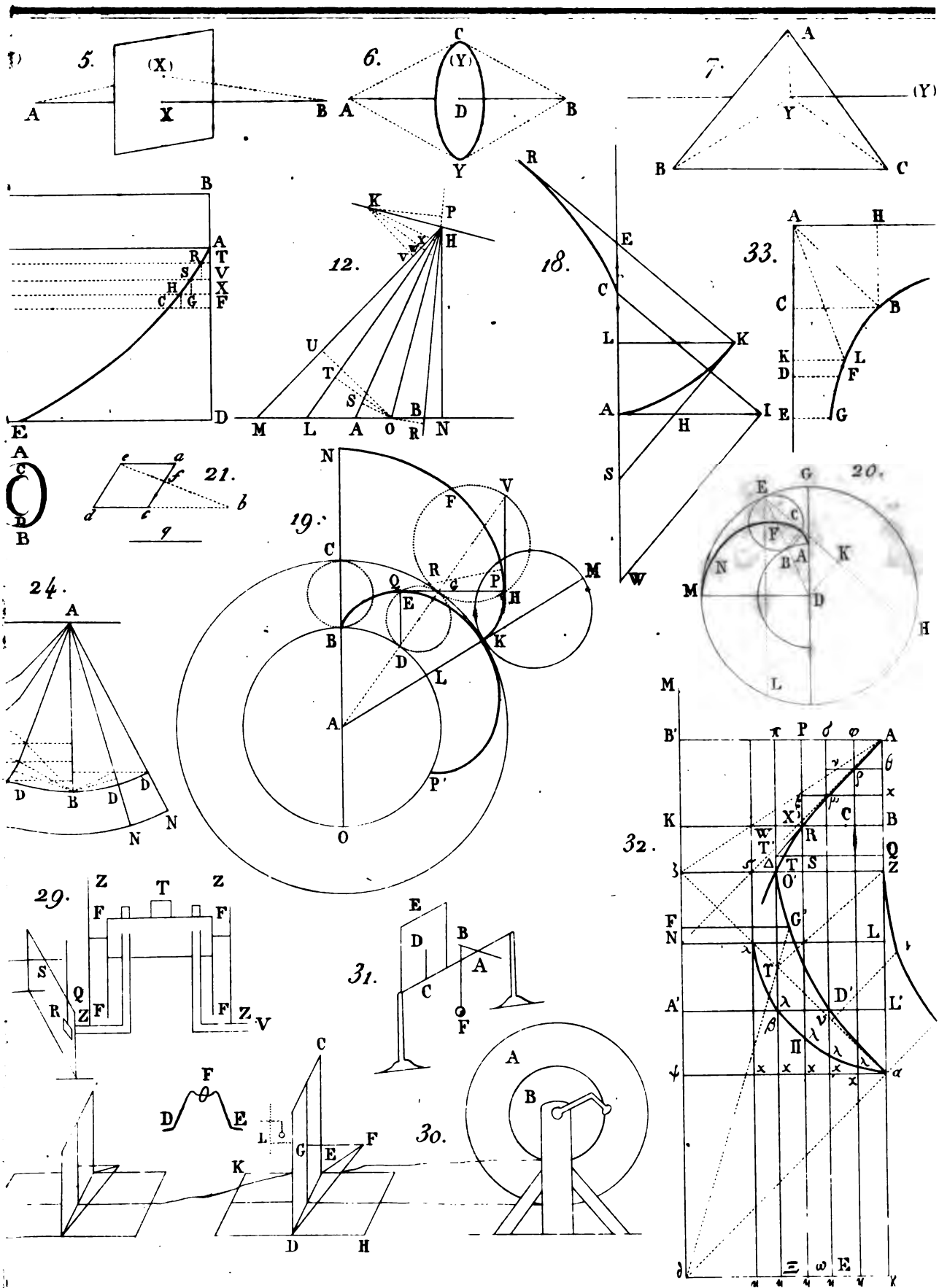
$$ABZA = \frac{\frac{1}{6}n^2y}{x+y} - \frac{1}{6}nx + \frac{1}{6}ny = \frac{\frac{1}{6}n^2y - \frac{1}{6}nx^2 + \frac{1}{6}ny^2}{x+y}$$

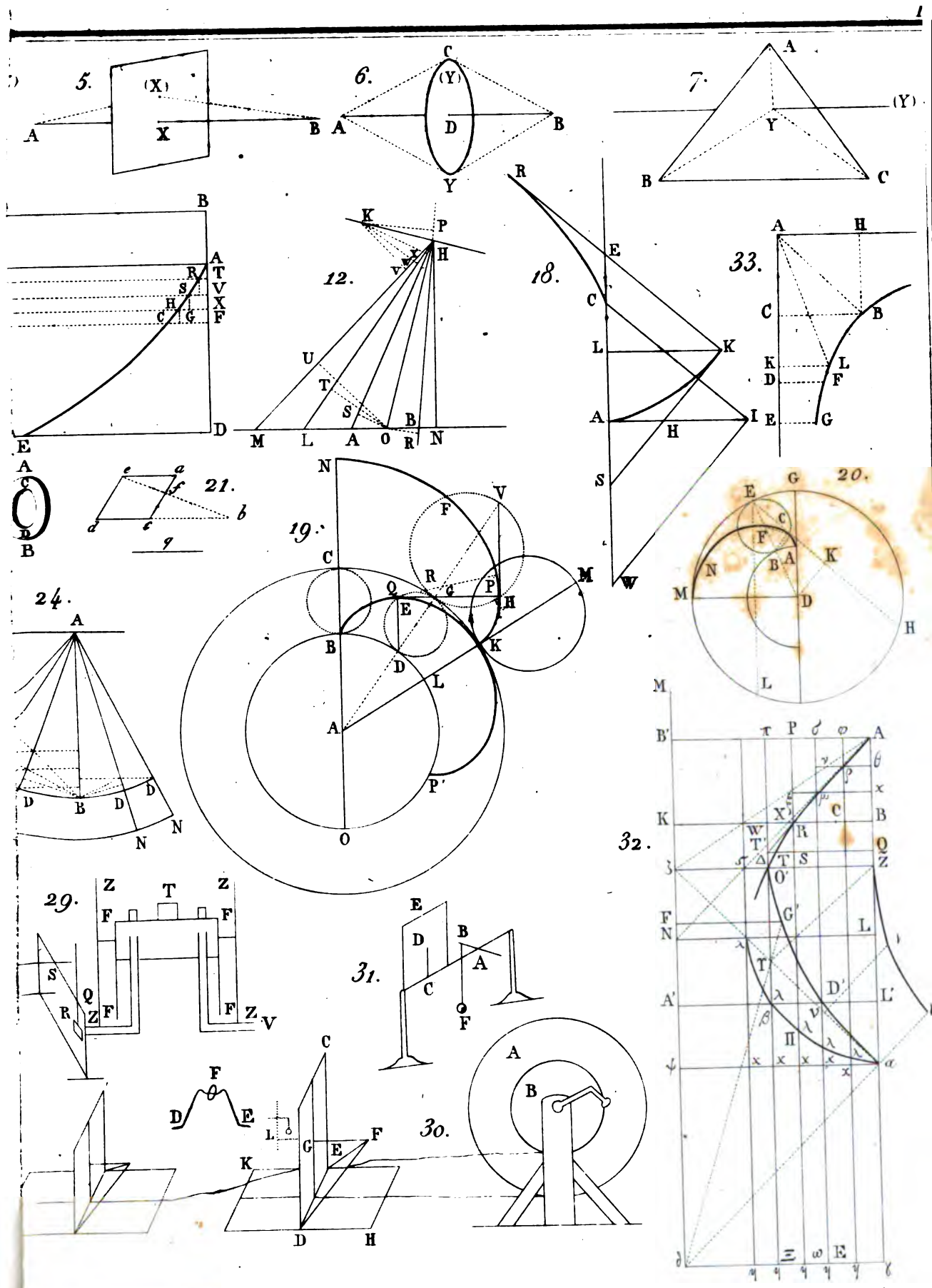
en n zijnde $\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x}$,

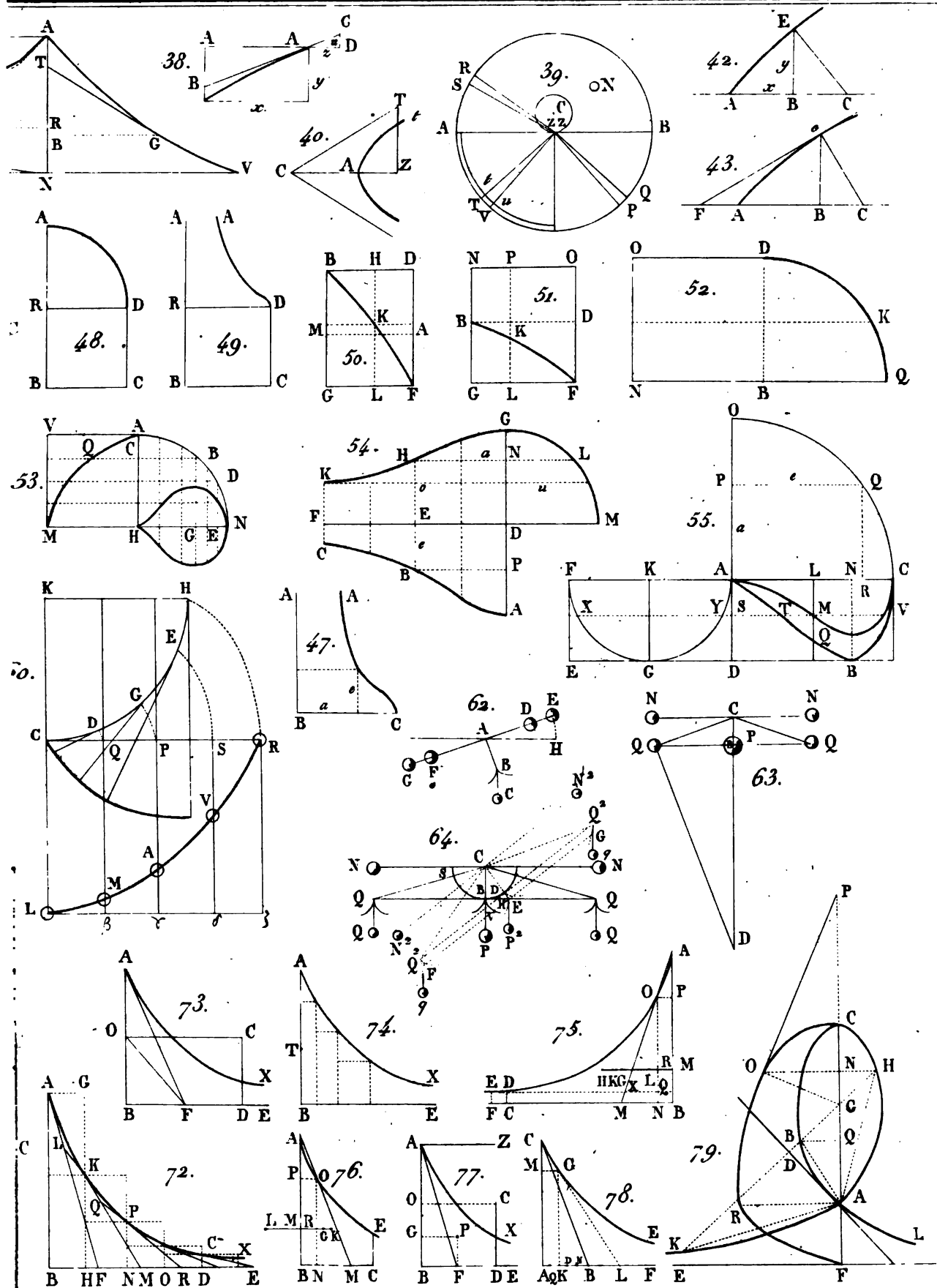
$$ABZA = \frac{\frac{1}{6}nx^2 + \frac{1}{6}n\frac{y^3}{x} - \frac{1}{6}nx^2 + \frac{1}{6}ny^2}{x+y} = \frac{\frac{1}{6}ny^2}{x}.$$

ERRATA.

Pag.	22.	lin.	13, a. f.	pro	K N M	lege:	K M N.
	23.	»	11, ab in.	»	S, V, H, G	»	S V, H G.
	35.	»	12, ab in.	»	D K	»	D $\hbar$.
	ibid.	»	13, ab in.	»	X D	»	$\hbar$ D
	38.	»	13, a. f.	»	= I W	»	et I W
	43.	»	1, a. fin.	»	R K P	»	B K P'
	53.	»	10, ab in.	»	$\imath$	»	δ
	54.	»	16, a. fin.	»	$e i$	»	et
	ibid.	»	15, 13, 5 a. fin.	pro,	$n e g \hbar$ et $e g \hbar$	lege:	$n e q \hbar, e q \hbar$
	68.	ubivis	in hac pagina	pro littera	L'	legatur	L
	72.	lin.	12, ab in.	pro	$\alpha \beta \Xi \delta$	lege:	$\alpha \beta \Xi \gamma$.
	73.	»	11, a. f.	»	θe	»	$\theta \rho$
	76.	quæ	in hac et insequenti pagina	occurrit littera	σ	mutetur in,	
	80.	lin.	1, ab in.	pro	A R G B	lege:	A R G B'
	ibid.	»	14, a. f.	»	A B	»	A B'
	ibid.	»	11, a. f.	»	σ B'	»	ϕ B'
	123.	»	9, ab in. et lin. ult.	pro fig. 40	»		fig. 40*







~~propter C. L. g. and H. R.~~
 ut 2CK ad CR, (per XCH) in n. CR ad CL.
 duo CL. in XHR. Distributio. in parabola
 v. M. L., diametro LC, ~~quod~~ quod mansit
 The later recta dicit 2CK



